

قناة نيلز العراقي YouTube
الأستاذ
حيدر وليد
الفصل الرابع
1 الدالة المقابلة
2 تكامل الدوال الجبرية
3 التكامل المحدد
4 تكامل الدوال المثلثية
5 تكامل من نمط اخر
6 تكامل الدالة التي تحوي مطلق
7 تكامل الدالة الشطرية
8 اللوغارتم الطبيعي
9 المساحات
10 المسافة
11 الحجوم الدورانية
قناة نيلز العراقي YouTube
تم تحميل ملزمة من قناة نيلز العراقي على اليوتيوب بامكانك تحميل جميع الملازم من القناة

1 الدالة المقابلة

1 اثبت ان $F(x)=1-\cos x$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=\sin x$ حيث $F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\to R:$ جد حسب المبرهنة الاساسية للتكامل $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$

2017 دور (1) احيائي - داخل

2020 دور (1) احيائي

Sol:

الدالة $f(x)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$F(x)=1-\cos x$

$f'(x)=\sin x=f(x)$

$\therefore F$ هي دالة المقابلة

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{6}} -\sin x\,dx$$

$$=-\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=-\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right]$$

....

....

....

....

....

2 اذا كانت الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,4]$ بحيث ان $F(x)=2x^3$ مقابلة لها جد $\int_1^4 f(x)\,dx$

2017 دور (2) احيائي- داخل

Sol:

$$\int_1^4 f(x)\,dx=\left[f(x)\right]_1^4=\left[2x^3\right]_1^4$$

$$=(128)-(2)=126$$

3 اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بحيث ان $F:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow R\ ,\ f(x)=\sin x$ هي دالة مقابلة للدالة f جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)$



2017 دور (2) احيائي - خارج

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)=\left[F(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0$$

$$=1-0=1$$

4 اذا كانت الدالة $F(x)=2\sin 4x$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ المستمرة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

2018 دور (2) احيائي- خارج

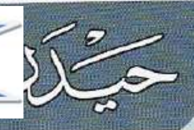
Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[2\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sin 2\pi-2\sin 0$$

$$=0$$



اذا كانت $F(x)=\sqrt{7+x^2}$ اثبت انها دالة مقابلة للدالة $f(x)=\frac{x}{\sqrt{7+x^2}}$ ثم جد $\int_1^3 f(x)\,dx$ علما انهما مستمرتين على الفترة $[1,3]$

5

2019 دور (1) تطبيقي - خارج

$$F(x)=\sqrt{7+x^2}=(7+x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$F'(x)=\frac{1}{2}(7+x^2)^{-\frac{1}{2}}.2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{7+x^2}}$$

$$F(x)=\frac{x}{\sqrt{7+x^2}}=f(x)$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx=[F(x)]_1^3$$

$$\left[\sqrt{7+x^2}\right]_1^3=\left[\sqrt{7+(3)^2}-\sqrt{7+(1)^2}\right]$$

$$\left[\sqrt{7+9}-\sqrt{8}\right]$$

$$16-\sqrt{8}=16-2\sqrt{2}$$

اذا كانت $\int_c^b f(x)\,dx=3\ ,\ \int_a^b f(x)\,dx=5$ وكانت $c\in[a,b]$ جد قيمة $\int_a^c f(x)\,dx$

6

2008 دور (1)

Sol:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$5=\int_a^c f(x)\,dx+3$$

$$\int_a^c f(x)\,dx=2$$

اذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx=6\ ,\ \int_1^3 g(x)dx=2$ جد $\int_1^3[f(x)-g(x)+4x]\,dx$

7

2010 دور (2)

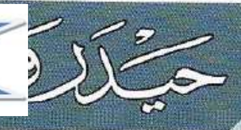
Sol:

$$\int_1^3[f(x)-g(x)+4x]\,dx$$

$$=\int_1^3 f(x)\,dx-\int_1^3 g(x)\,dx+\int_1^3 4x\,dx$$

$$=6-2+\left[2x^2\right]_1^3=4+(18-2)$$

$$=20$$



8 — 2016 دور (1) — 2019 دور (2) احيائي

$f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2,6]$ فاذا كان $\int_{1}^{6} f(x)\,dx = 6$ وكان $\int_{-2}^{6} [f(x)+3]\,dx = 32$ جد $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

Sol :

$$\int_{-2}^{6} [f(x)+3]\,dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} [f(x)]\,dx + \int_{-2}^{6} [3]\,dx = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6} [f(x)]\,dx + [3x]_{-2}^{6} = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6} [f(x)]\,dx + (18) - (-6) = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6} [f(x)]\,dx + 24 = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6} [f(x)]\,dx = 8$$

$$\int_{-2}^{6} f(x) = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{6} f(x)\,dx$$

$$8 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 6$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 2$$

9 — 2018 دور (3) احيائي - داخل

جد قيمة التكامل $\int_{-1}^{4} [8-2f(x)]\,dx$ اذا كان $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 2$

Sol:

$$\int_{-1}^{4} [8-2f(x)]\,dx \Rightarrow$$

$$= \int_{-1}^{4} 8\,dx - \int_{-1}^{4} [2f(x)]\,dx$$

$$= [8x]_{-1}^{4} - 2\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$$

$$= [(32) - (-8) - 2(2)]$$

$$= 40 - 4 = 36$$

اثبت ان $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ حيث $F:R\to R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=\cos 2x$ حيث $f:R\to R$ ثم جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$

10 — 2020 تمهيدي احيائي

Sol:

① $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ مستمرة على R

$\therefore$ مستمرة بالفترة $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

② $F'(x)=\cos 2x=f(x)$

$\therefore F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx=\left[\frac{1}{2}\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin 0$$

$$=\frac{1}{2}(1)-0$$

$$=\frac{1}{2}$$




2 تكامل الدوال الجبرية

1 جد $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2dx$

1996 دور (2)

Sol:

$$\int \sqrt{x}(x+4\sqrt{x}+4)dx$$

$$\int (\sqrt{x}\ x+4x+4\sqrt{x})dx$$

$$\int (x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^2+\frac{2}{3}(4)x^{\frac{3}{2}}+c$$

$$\frac{2}{5}\sqrt{x^3}+2x^2+\frac{8}{3}\sqrt{x^3}+c$$

2 جد $\int \frac{1}{(1+x)^2}dx$

2007 دور (2)

Sol:

$$\int (1+x)^{-2}dx$$

$$=\frac{(1+x)^{-1}}{-1}+c$$

$$=\frac{-1}{(1+x)}+c$$

3 جد $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\ dx$

2010 تمهيدي

2016 دور (3)

Sol:

$$\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\ dx$$

$$=\int 2(2x+3)(2x+3)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$=2\int (2x+3)^{\frac{3}{2}}\ dx$$

$$=\frac{2}{5}(2x+3)^{\frac{5}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{(2x+3)^5}+c$$

4 جد $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$

2012 دور (2)

Sol: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \left(3+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{-1}{2}} x^{\frac{-1}{2}}\ dx$$

يهمل

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\int \left(3+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{-1}{2}} \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}(2)\left(3+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{x}}+c$$

5 جد التكامل التالي $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$

2015 دور (2)

Sol:

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$$

$$= \int \frac{3(x-2)}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$= 3\int (x-2)^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= 3\left(\frac{3}{5}\right)(x-2)^{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5} + c$$

6 جد $\int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}\,dx$

2016 دور (2) خارج

Sol: $\int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}\,dx$

$$= \int \frac{(x-3)}{[2(x-3)]^3}\,dx = \frac{1}{8}\int (x-3)^{-2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{8}(x-3)^{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{8(x-3)} + c$$

7 جد $\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

2017 دور (2) تطبيقي - خارج

Sol:

$$\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$$

$$= \int \frac{[x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-1)]^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}\,dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-3}{4}}\,dx$$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= 2\int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)dx$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{(\sqrt{x}-1)^3} + c$$

8 جد $\int \frac{x}{(3x^2+7)^4}$

2017 دور (1) تطبيقي - موصل

Sol:

$$\frac{1}{6}\int 6x(3x^2+7)^{-4}\,dx$$

$$\frac{1}{6}\,\frac{(3x^2+7)^{-3}}{-3} + c$$

$$\frac{-1}{18(3x^2+7)^3} + c$$

9 جد $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x^3}+1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

2017 دور (2) احيائي - موصل

Sol :

$$\int (x^{\frac{1}{3}}+1)^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{-2}{3}}$$

$$=3\int (x^{\frac{1}{3}}+1)^{\frac{1}{2}}.(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}})+c$$

$$=\cancel{3}(\frac{2}{\cancel{3}})(x^{\frac{1}{3}}+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=2(\sqrt[3]{x}+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=2\sqrt{(\sqrt[3]{x}+1)^3}+c$$

10 جد $\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}}$

2017 دور (2) احيائي - موصل

Sol :

$$\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^2(x^2+2)}}dx$$

$$\int \frac{4\cancel{x^2}}{\mp\cancel{x}\sqrt{x^2+2}}dx=\int \frac{4x}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$\mp 2\int 2x(x^2+2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$\mp 2(x^2+2)^{\frac{1}{2}}.2+c$$

$$\mp 4\sqrt{x^2+2}+c$$

11 جد $\int \sqrt[3]{x^5-x^3}dx$

2018 تمهيدي تطبيقي

Sol :

$$\int \sqrt[3]{x^3(x^2-1)}dx$$

$$\int x\sqrt[3]{x^2-1}dx$$

$$\frac{1}{2}\int 2x(x^2-1)^{\frac{1}{3}}dx$$

$$\frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{3}}.\frac{3}{4}+c$$

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2-1)^4}+c$$

12 جد $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}dx$

2019 دور (2) تطبيقي

Sol :

$$\int \frac{(3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7}{\sqrt{7}\sqrt{x}}dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\frac{-2}{\sqrt{5}}\int \frac{-\sqrt{5}}{2}\frac{(3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7}{\sqrt{x}}$$ مشتقة داخل القوس

$$\frac{-\cancel{2}}{\sqrt{35}}.\frac{(3-\sqrt{5x})^8}{\cancel{8}}+c$$

$$\frac{-1}{4\sqrt{35}}(3-\sqrt{5x})^8+c$$

13 جد $\int \sqrt{3x^3-5x^5}dx$

2019 دور (1) تطبيقي

Sol :

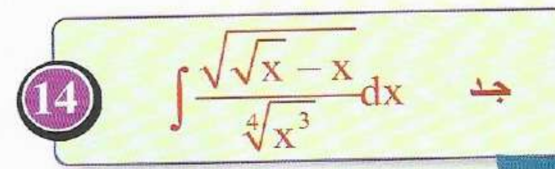
$$\int \sqrt{x^3(3-5x^2)}dx \Rightarrow$$

$$\int x^3\sqrt{3-5x^2}dx \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{10}\int -10x(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}dx$$

$$\frac{-1}{10}.\frac{3}{4}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}+c$$

$$\frac{-3}{40}(\sqrt[3]{(3-5x^2)^4})+c$$



2019 دور (2) احيائي

Sol:

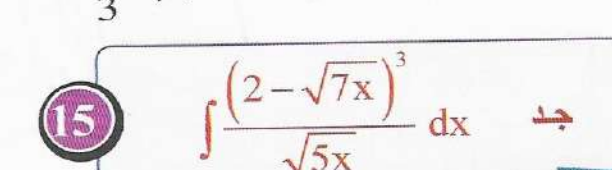
$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}\sqrt{(1-\sqrt{x})}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$$

$$\int -2\,\frac{1(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{-2\sqrt{x}}dx$$

$$-2.\frac{2}{3}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}+c$$

$$\frac{-4}{3}\sqrt{(1-\sqrt{x})^3}+c$$



2017 دور (3) احيائي - داخل

Sol:

$$\int \frac{\left(2-\sqrt{7x}\right)^3}{\sqrt{5}\sqrt{x}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\left(2-\sqrt{7}x^{\frac{1}{2}}\right)^3 x^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-2}{\sqrt{7}}\right)\int\left(2-\sqrt{7}x^{\frac{1}{2}}\right)^3\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{-2}{\sqrt{35}}\right)\left(2-\sqrt{7}x^{\frac{1}{2}}\right)^4+c$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{35}}\left(2-\sqrt{7x}\right)^4+c$$

16 $\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}\,dx$

2017 دور (3) تطبيقي

Sol:

$$\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}\,dx$$

$$=\int \frac{9x^4-24x^2+16-16}{x^2}\,dx$$

$$=\int \frac{9x^4-24x^2}{x^2}\,dx$$

$$=\int \frac{x^2\left(9x^2-24\right)}{x^2}\,dx$$

$$=\int\left(9x^2-24\right)\,dx$$

$$=3x^3-24x+c$$

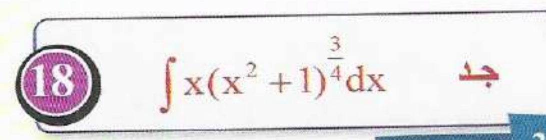
17 $\int x(x^2+3)^3dx$ جد

2003 دور (1)

Sol:

$$\int x(x^2+3)^3dx=\frac{1}{2}\int(x^2+3)^3\,2x\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(x^2+3\right)^4+c$$



2007 دور (1)

Sol: $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{4}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{\frac{3}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\left(x^2+1\right)^{\frac{7}{4}}+c$$

$$=\frac{2}{7}\sqrt[4]{(x^2+1)^7}+c$$



3 التكامل المحدد

1 جد $\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\,dx$

1997 دور (1)

Sol:

$$\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\,dx=\frac{1}{2}\int_4^8 2x(x^2-15)^{\frac{1}{2}}dx$$

مشتقة داخل القوس

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(x^2-15\right)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{\left(x^2-15\right)^3}\right]_4^8$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{(64-15)^3}-\sqrt{(16-15)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(343-1)=\frac{342}{3}=144$$

2 جد $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$

2000 دور (2)
2002 دور (1)
2005 دور (2)

Sol:

$$\int_0^4 x\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 2x(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\left[(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})\left(x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}\right]_0^4$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}\right]_0^4$$

$$=\frac{1}{3}\left[\sqrt{(16+9)^3}-\sqrt{(0+9)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(125-27)=\frac{98}{3}$$

3 جد قيمة $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\,(2x+5)dx$

2001 دور (1)

Sol:

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\,(2x+5)dx$$

$$=\int_0^4 \left(x^2+5x\right)^{\frac{1}{2}}(2x+5)dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(x^2+5x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$=\frac{2}{3}\left[\sqrt{\left(x^2+5x\right)^3}\right]_0^4$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{(36)^3}-\sqrt{(0)^3}\right)=\frac{2}{3}(216)$$

$$=144$$

4 جد $\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

2001 دور (2)

Sol:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(3-2x)^2}=\int_{-1}^1 (3-2x)^{-2}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(-2)(3-2x)^{-2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[(3-2x)^{-1}\right]_{-1}^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_{-1}^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2}-\frac{1}{3+2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{5}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}$$

$$=\frac{2}{5}$$



5 جد $\int_{-1}^{+1} \sqrt[3]{3x^3 - 2x^5}\, dx$

2001 دور (2) — 2001 خارج — 2004 دور (2)

Sol:

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x(3-2x^2)^{\frac{1}{3}}\, dx$$

$$= \frac{-1}{4}\int_{-1}^{1} (-4)(x)(3-2x^2)^{\frac{1}{3}}\, dx$$

$$= \frac{-1}{4}\frac{3}{4}\left[(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-3}{16}(1-1) = 0$$

6 جد قيمة $\int_{0}^{4} \sqrt{x}\ (x+6)\, dx$

2002 دور (2)

Sol:

$$\int_{0}^{4} (x)^{\frac{1}{2}}\ (x+6)\, dx = \int_{0}^{4} \left(x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}\right) dx$$

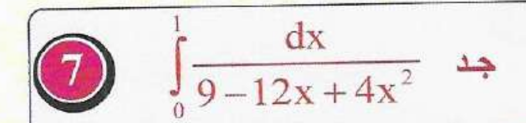
$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + (6)\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{4}$$

$$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 4\sqrt{x^3}\right]_{0}^{4}$$

$$= \left(\frac{2}{5}\sqrt{(4)^5} + 4\sqrt{(4)^3} - 0\right)$$

$$= \frac{64}{5} + 32$$

$$= \frac{224}{5}$$



7 جد $\int_{0}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

2003 دور (2)

Sol:

$$\int_{0}^{+1} \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

$$= \int_{0}^{+1} \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_{0}^{-1} (3-2x)^{-2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{0}^{+1} (-2)(3-2x)^{-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[(3-2x)^{-1}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

8 جد $\int_{1}^{2} \frac{1}{(5-2x)^2}\, dx$

2006 دور (1)

Sol: $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(5-2x)^2} = \int_{1}^{2} (5-2x)^{-2}\, dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_{1}^{2} (5-2x)^{-2}(-2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[(5-2x)^{-1}\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5-2x}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5-4} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$



9 جد $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$

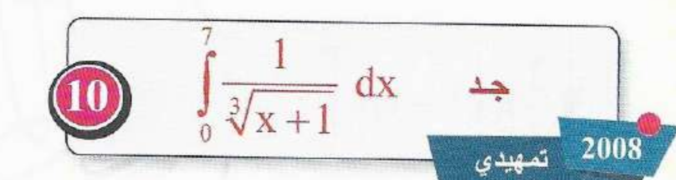
2006 دور (2)

$$Sol: \int_1^2 \frac{1}{(3x-4)^2}\, dx = \int_1^2 (3x-4)^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 (3)(3x-4)^{-2} dx$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3x-4}\right]_1^2$$

$$= \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{-1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$



10 جد $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx$

2008 تمهيدي

$$Sol: \int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx = \int_0^7 (x+1)^{\frac{-1}{3}}\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^7 = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]_0^7$$

$$= \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2}$$

11 جد $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx$

2009 دور (1)

$$Sol: \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \int_0^1 x(x^2+1)^{-2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2x(x^2+1)^{-2} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x^2+1)^{-1}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-1\right]$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = +\frac{1}{4}$$

12 جد قيمة $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\, dx$

2009 دور (2)

2018 دور (2) احيائي - داخل

Sol:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\, dx$$

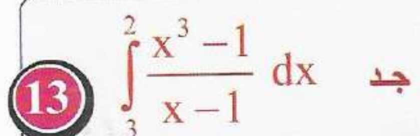
$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}\, dx = \int_3^8 \frac{x}{x\sqrt{(x+1)}}\, dx$$

$$= \int_3^8 \frac{x}{x\sqrt{(x+1)}}\, dx = \int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}}\, dx$$

$$= 2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8 = 2\left[\sqrt{x+1}\right]_3^8$$

$$= 2(3-2) = 2$$

13 جد



$$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$$

2015 دور (4) رصافة

2017 تمهيدي - احيائي

Sol:

$$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$$

$$= -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}\,dx$$

$$= -\int_2^3 (x^2+x+1)\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3$$

$$= -\left[\left(9+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+2+2\right)\right]$$

$$= -\left[12+\frac{9}{2}-\frac{8}{3}-4\right]$$

$$= -8-\frac{9}{2}+\frac{8}{3}$$

$$= \frac{-48-27+16}{6}$$

$$= \frac{-59}{6}$$

14 اثبت ان

$$\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$$

2015 دور (2) خارج

2019 دور (1) احيائي

Sol:

$$\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

$$= \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-2}{3}}\,dx$$

$$= 3\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\,dx$$

مشتقة داخل القوس

$$= \left[3\left(\frac{2}{3}\right)(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8$$

$$= \left[2\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3}\right]_1^8$$

$$= \left(2\sqrt{(\sqrt[3]{8}-1)}\right)-\left(2\sqrt{(\sqrt[3]{1}-1)^3}\right)$$

$$= \left(2\sqrt{(1)^3}\right)-\left(2\sqrt{(0)^3}\right)$$

$$= 2$$

15 جد $\int_0^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2 dx$

2017 دور (1) احيائي - موصل

Sol:

$$\int_0^1 \sqrt{x}(x+4\sqrt{x}+4)dx$$

$$\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^2+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{2}{5}+2+\frac{8}{3}\right]-[0]$$

$$=\frac{6+30+40}{15}=\frac{76}{15}$$

16 جد $\int_4^0 x(x-1)(x-2)\,dx$

2018 دور (1) تطبيقي - داخل

Sol:

$$\int_4^0 x(x-1)(x-2)\,dx$$

$$=-\int_0^4 x(x^2-3x+2)\,dx$$

$$=-\int_0^4 (x^3-3x^2+2x)\,dx$$

$$=-\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^4$$

$$=-[(64-64+16)-(0)]$$

$$=-16$$

17 جد $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

1996 دور (1)

Sol: $\int_0^3 (x+1)^{\frac{-1}{2}}dx$

$$=2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3$$

$$=2\left[\sqrt{x+1}\right]_0^3=2(2-1)$$

$$=2$$

18 $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}dx$

2020 تمهيدي تطبيقي

$$\int_1^3 \left(\frac{2x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)dx$$

$$\int_1^3 (2x-4+5x^{-2})\,dx$$

$$=\left[x^2-4x+5x^{-1}\right]_1^3$$

$$=\left[x^2-4x+\frac{5}{x}\right]_1^3$$

$$=\left[(3)^2-4(3)+\frac{5}{3}\right]-[1-4+5]$$

$$=\left[9-12+\frac{5}{3}\right]-[6-4]$$

$$=\left[-3+\frac{5}{3}-2\right]$$

$$-5+\frac{5}{3}=\frac{-15+5}{3}=\frac{-10}{3}$$



19

$$\int_{4}^{1} \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)\,dx$$

$$= -\int_{1}^{4} \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)\,dx$$

$$= -\int_{1}^{4} x+\sqrt{x}\ dx$$

$$= -\int_{1}^{4} x+x^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4$$

$$= -\left[\left[\frac{16}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{(4)^3}\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{1}\right]\right]$$

$$= -\left[\left[8+\frac{2}{3}(2)^3\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right]\right]$$

$$= -\left[\left[8+\frac{2}{3}(8)\right]-\left[\frac{3+4}{6}\right]\right]$$

$$= -\left[\left[8+\frac{16}{3}\right]-\left[\frac{7}{6}\right]\right]$$

$$= -\left[\left[(8+\frac{16}{3}-\frac{7}{6})\right]\right.$$

$$= -\left[\frac{48+32-7}{6}\right] = -\left[\frac{73}{6}\right]$$

4 تكامل الدوال المثلثية

1 جد التكامل التالي

$$\int\left(\sin x-3\sec^2 x\right)dx$$

1996 دور (1)

Sol :

$$\int\left(\sin x-3\sec^2 x\right)dx$$

$$=-\cos x-3\tan x+c$$

2 جد $\int \cos 6x\cos 3x\ dx$

1996 دور (1)

Sol :

$$\int\left(1-2\sin^2 3x\right)\cos 3x\ dx$$

$$=\int\cos 3x\ dx-2\int\sin^2 3x\cos 3x\ dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(\int\cos 3x(3)\ dx-2.\frac{1}{3}\int\sin^2 3x 3\cos 3x\ dx\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{2}{9}\sin^3 3x+c$$

3 جد التكامل

$$\int\left(\sec x-\sin x\right)\left(\sec x+\sin x\right)dx$$

1996 دور (2)

Sol:

$$=\int\left(\sec^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$=\int\sec^2 x-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$=\int\left[\sec^2 x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right]dx$$

$$=\tan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

4 جد $\int\cos 2x\sin^2 x\ dx$

1997 دور (1)

Sol:

$$\int\cos 2x\sin^2 x\ dx$$

$$=\int\cos 2x.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos^2 2x\right)dx$$

$$=\int\left[\frac{1}{2}\cos 2x-(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(1+\cos 4x)\right]dx$$

$$=\int\left[\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 4x\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}\sin 4x+c$$

5 $\int\left(1+\cos 3x\right)^2 dx$

1997 دور (2)

2013 دور (2)

Sol : $\int\left(1+\cos 3x\right)^2 dx$

$$=\int\left(1+2\cos 3x+\cos^2 3x\right)dx$$

$$=\int\left|1+2\cos 3x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 6x\right|dx$$

$$=\int\left[\frac{3}{2}+2\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 6x\right]dx$$

$$=\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{12}\sin x+c$$





6 جد $\int (\cos x - \sin 2x)^2 dx$

1998 دور (1)

Sol:

$$\int (\cos x - \sin 2x)^2 \, dx$$

$$= \int \left(\cos^2 x - 2\sin 2x \cos x + \sin^2 2x\right) dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - (2)2\sin x \cos x . \cos x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right] dx$$

$$= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x \, dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x \sin x - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

7 جد $\int (\sin^2 x + \cos^4 x) \, dx$

1999 دور (2)

Sol :

$$\int \left(\sin^2 x + \cos^4 x\right) dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \left(\cos^2 x\right)^2\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}\cos 2x} + \left(\frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{2}\cos 2x} + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right)\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} . \frac{1}{2}\left(1 + \cos 4x\right)\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x\right] dx$$

$$= \frac{7}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

8 جد $\int \sin^4 x\, dx$

2000 دور (1)

Sol:

$$= \int \sin^2 x \ \sin^2 x \ dx$$

$$= \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)dx$$

$$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x)dx$$

$$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos^2 2x)dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\ dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x\ dx + \int \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\ dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x\ dx + \int (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x)dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\ dx - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int 2dx \cos 2xdx + \int \frac{1}{8}dx + \frac{1}{8}.\frac{1}{4}\int 4\cos 4xdx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

9 جد $\int \sin^2 x.\cos^2 x\ dx$

2001 دور (1)

Sol:

$$= \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x)dx$$

$$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos^2 2x)dx$$

$$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x)\ dx$$

$$= \int \left[(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x) \right] dx$$

$$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x)\ dx$$

$$= \int \frac{1}{8}\ dx - \frac{1}{8}.\frac{1}{4}\int 4\cos 4x\ dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

10 $\int \frac{4\csc^2 x}{\sqrt{1-3\cot 2x}}\,dx$

2004 دور (2)

Sol:

$$\frac{4}{6}\int 6\sec^2 2x.(1-3\cot 3x)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$\frac{4}{6}(1-3\cot 3x)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$\frac{4}{6}\sqrt{1-3\cot 3x}+c$$

11 $\int\left(\sin^2 x+1\right)dx$ جد

2006 تمهيدي

Sol:

$$\int\left(\sin^2 x+1\right)dx$$

$$=\int\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+1\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+x+c$$

$$=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

12 $\int \sin 2x\cos^2 x\,dx$

2007 دور (2)

Sol:

$$\int 2\cos x\sin x.\cos^2 x\;dx$$

$$-2\int -\sin x\cos^3 x\,dx$$

$$=-\cancel{2}\frac{\cos^4 x}{\cancel{4}}+c$$

$$=\frac{-1}{2}\cos^4 x+c$$

13 $\int \tan 2x\sec^3 2x\;dx$ جد

2008 خارج القطر

Sol:

$$\int \tan 2x\sec^3 2x\;dx$$

$$\int \sec^2 2x\;.\;\sec 2x\tan 2x\;dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \sec^2 x(2)\;\sec 2x\;\tan 2x\;dx$$

$$=\frac{1}{6}\sec^3 2x+c$$

14 $\int \cos^3 x\;dx$ جد

2008 خارج القطر

Sol:

$$\int \cos^3 x\;dx=\int \cos x.\cos^2 x\;dx$$

$$=\int \cos x\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$=\int\left(\cos x-\sin^2 x\cos x\right)dx$$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$$

2019 دور (3) احيائي

15 جد $\int \cos^2 2x \sin x\, dx$

2008 دور (2)

Sol:

$$\int \cos^2 2x \sin x\ dx$$

$$= \int (\cos 2x)^2 \sin x\ dx$$

$$= \int \left(2\cos^2 x - 1\right)^2 \sin x\ dx$$

$$= \int \left(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1\right) \sin x\ dx$$

$$= 4\int \cos^4 x\ \sin x\ dx - 4\int \cos^2 x \sin x\ dx + \int \sin x\ dx$$

$$= -4\int \cos^4 x(-1)\sin x\ dx + 4\int \cos^2 x(-1)\sin x\ dx + \int \sin x\ dx$$

$$= \frac{-4}{5}\cos^5 x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \cos x + c$$

16 جد $\int \tan 3x \sec^5 3x\ dx$

2010 تمهيدي

Sol:

$$\int \tan 3x \sec^5 3x\ dx$$

$$= \int \sec^4 3x\ \sec 3x\ \tan 3x\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \sec^4 3x(3)\sec 3x \tan 3x\ dx$$

مشتقة داخل القوس(تهمل)

$$= \frac{1}{15}\sec^5 3x + c$$

17 جد $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\, dx$

2010 تمهيدي

2014 خارج القطر

Sol:

$$\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\, dx = \int \frac{\cos x . \cos^2 x}{1-\sin x}\, dx$$

$$= \int \frac{\cos x.\left(1-\sin^2 x\right)}{1-\sin x}\, dx$$

$$= \int \frac{\cos x\left(\cancel{1-\sin x}\right)\left(1+\sin x\right)}{\cancel{1-\sin x}}\, dx$$

$$= \int (1+\sin x)\cos x$$

$$= \int (\cos x + \cos x.\sin x)\ dx$$

$$= \sin x - \frac{\cos^2 x}{2} c$$

2017 دور (3) تطبيقي - داخل

18 $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\, dx$

2010 دور (2) احيائي - خارج

2017 دور (3) احيائي - داخل

Sol:

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\, dx$$

$$= \int \tan^{-3} x \sec^2 x\ dx$$

$$= -\frac{1}{2}\tan^{-2} x + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$$

2018 دور (2) احيائي

19 $\int \cot x \csc^3 x \, dx$

2012 دور (2) — 2019 تمهيدي احيائي

Sol:

$$\int \cot x \csc^3 x \, dx$$

$$= \int \csc^2 x (\csc x \cot x) dx$$

$$= -\int \csc^2 x (-\csc x \cot x) \, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\csc^3 x + c$$

20 $\int \sqrt{1-\sin 2x} \, dx$

2013 خارج القطر — 2014 دور (4) الانبار — 2019 دور (2) تطبيقي — 2017 دور (1) احيائي- موصل

Sol:

$$\int \sqrt{1-\sin 2x} \, dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x)} \, dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx$$

$$= \pm\int (\sin x - \cos x) \, dx$$

$$= \pm(-\cos x - \sin x) + c$$

21 $\int \csc^2 x . \cos x \, dx$

2013 دور (1) — 2017 دور (1) تطبيقي - موصل

Sol :

$$\int \csc^2 x . \cos x \, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} . \cos x\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{\cos x}{\sin x} . \frac{1}{\sin x}\right) dx$$

$$= \int \cot x . \csc x \, dx$$

$$= -\csc x + c$$

22 $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

2014 دور (1) — 2015 دور (1) — 2017 دور (2) تطبيقي - داخل — 2017 دور (1) تطبيقي - خارج

Sol:

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$= \int (\cos 2x + \sin 2x) \, dx$$

2017 دور (2) احيائي - موصل

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

2019 دور (1) تطبيقي

جد التكاملات التالية

23 $\int \sin 6x \cos^2 3x \, dx$

2014 دور (3)

2016 دور (1)

Sol:

$$\int \sin 6x \cos^2 3x \, dx$$

$$= \int 2\sin 3x \cos 3x . \cos^2 3x \, dx$$

$$= 2\int \cos^3 x \, \sin 3x \, dx$$

$$= 2(\frac{-1}{3})\int \cos^3 3x(-3) \, \sin 3x \, dx$$

$$= \frac{-2}{3} \, . \, \frac{1}{4}\cos^4 3x + c$$



$$= \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$$

24 $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$

2015 دور (1) نازحين

Sol:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$$

$$= \int (\sin x)^{\frac{-1}{3}} \cos x \, dx$$

$$= \frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 x} + c$$

25 $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x} dx$

2016 دور (1)

Sol:

$$= \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x} dx \Rightarrow = \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x} dx$$

$$= \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \csc^2 2x \, dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}(-2)\csc^2 2x \, dx$$

$$= \frac{-1}{2} . \frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} 2x + c$$

2016 دور (3) خارج

2017 تمهيدي تطبيقي

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{\cot^3 2x} + c$$

26 $\int 9x^2 \sin x^3 \, dx$

2017 تمهيدي تطبيقي

Sol:

$$3\int 3x^2 \sin x^3$$

يهمل

$$= 3(-\cos x^3) + c$$

$$= -3\cos x^3 + c$$

27 $\int(\cos^4 x-\sin^4 x)\,dx$

2017 دور (1) احيائي/خارج

Sol:

$$\int(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx$$

قانون ذهبي = 1

$$\int(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$$

قانون = cos2x

$$\frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

28 $\int x^2\sin x^3 dx$

2017 دور (3) احيائي

Sol:

$$\frac{1}{3}\int 3x^2\sin x^3 dx$$

$$\frac{1}{3}(-\cos x^3)+c$$

$$\frac{-1}{3}\cos x^3+c$$

29 $\int\left(\tan x+\tan^3 x\right)dx$

2018 دور (2) احيائي - خارج

2017 دور (3) احيائي - داخل

Sol:

$$\int\left(\tan x+\tan^3 x\right)dx$$

$$=\int\tan x\left(1+\tan^2 x\right)dx$$

$$=\int\tan x.\sec^2 x=\frac{1}{2}\tan^2 x+c$$

30 $\int\sin^2 9x\,dx$

2017 دور (2) تطبيقي - داخل

Sol:

$$\int\sin^2 9x\,dx$$

$$=\int\frac{1}{2}\left(1-\cos 18x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{36}\sin 18x+c$$

31 $\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\,dx$ جد

2018 دور (1) تطبيقي- داخل

Sol:

$$\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\,dx=\int\frac{\sin x.\sin^2 x}{1-\cos x}\,dx$$

$$=\int\frac{\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{1-\cos x}\,dx$$

$$=\int\frac{\sin x\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}{1-\cos x}\,dx$$

$$=\int\sin x\left(1+\cos x\right)dx$$

$$=\frac{-1}{2}\left(1+\cos x\right)^2+c$$



32 $\int \cos^4 3x \, dx$

2018 دور (2) تطبيقي - خارج

Sol:

$$\int \cos^4 3x \, dx = \int \left[\cos^2 3x\right]^2 dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+\cos 6x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 6x+\cos^2 6x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 6x+\frac{1}{2}(1+\cos 12x)\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 6x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 12x\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 6x+\frac{1}{8}\cos 12x\right) dx$$

$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{96}\sin 12x+c$$

33 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x . \sin^2 x \, dx$

2018 دور (1) احيائي - خارج

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x . \sin^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sin x\cos x . \sin^2 x \, dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x\cos x \, dx$$

$$= \frac{2}{4}\left[\sin^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^4 - (\sin 0)^4\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{32}$$

34 $\int \frac{\cos 6x}{\cos 3x - \sin 3x} dx$

2019 دور (2) احيائي

Sol:

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos 3x - \sin 3x} dx$$

$$\int \frac{(\cos 3x + \sin 3x)(\cos 3x - \sin 3x)}{(\cos 3x - \sin 3x)} dx$$

$$\int (\cos 3x + \sin 3x) dx$$

$$\frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{3}\cos 3x + c$$

35 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$

1996 دور (2)

Sol :

$$[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right]$$

$$=0+1=1$$

36 جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)^2 dx$

2010 دور (1)

2019 دور(1) تطبيقي

Sol:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)^2 dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right) dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin 2x)\, dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\cos 0\right)$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$$

37 جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

2013 دور (3)

2014 دور (2)

2018 دور (3) احيائي - داخل

Sol:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x.\sec^2 x \, dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}(\tan\frac{\pi}{4})^2-(\tan 0)^2=\frac{1}{2}$$

38 جد $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

2015 تمهيدي

Sol:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{-1}{2}} \cos x \, dx$$

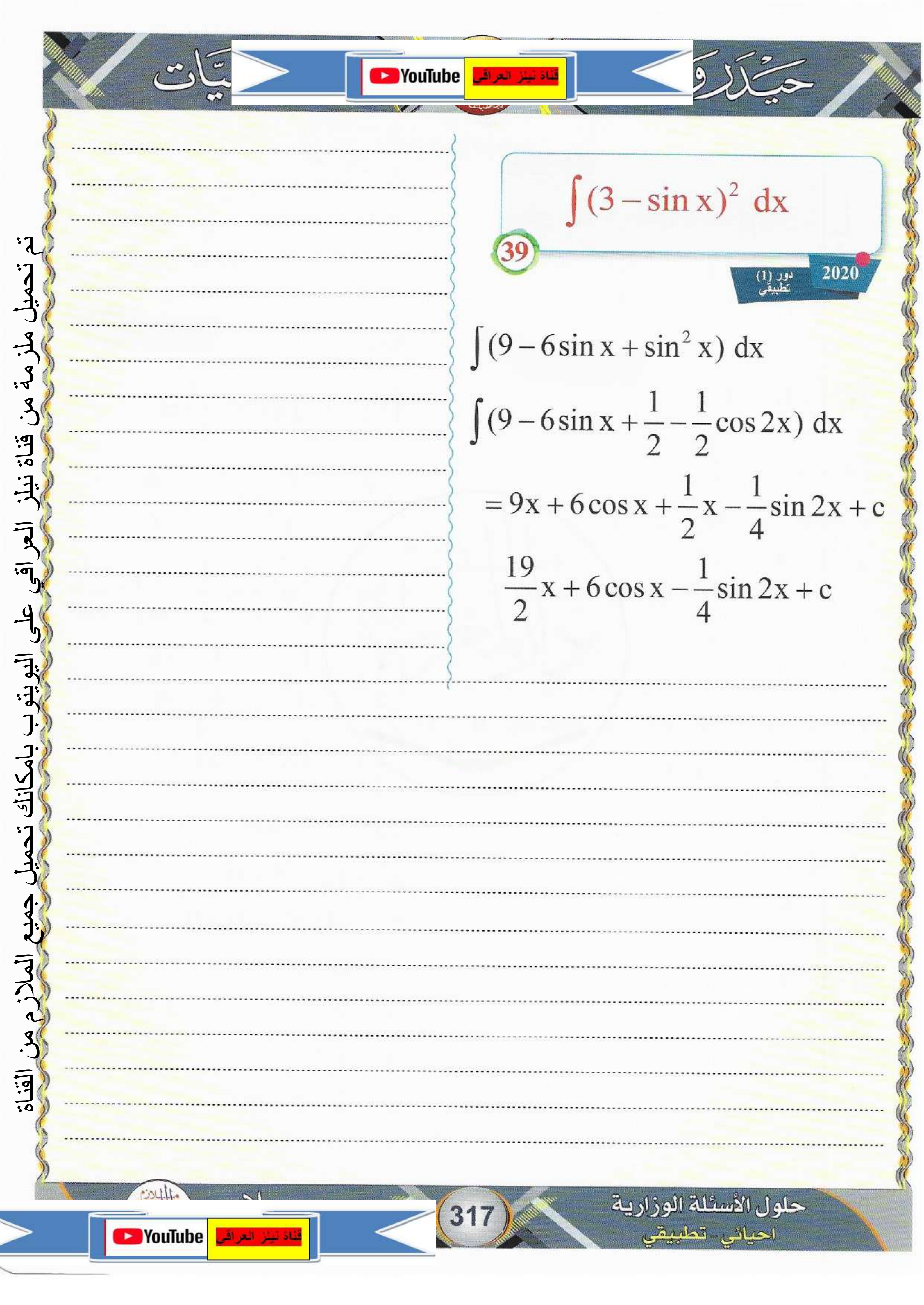
$$=2\left[(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\left[2\sqrt{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}-2\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$=2\sqrt{1}-2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=2-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$=2-\sqrt{2}$$



$$\int (3-\sin x)^2 \, dx$$

39

2020 دور (1) تطبيقي

$$\int (9-6\sin x+\sin^2 x)\,dx$$

$$\int \left(9-6\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$=9x+6\cos x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

$$\frac{19}{2}x+6\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$$




5 تكامل من نمط اخر

1 اذا كان $\int_{-1}^{a}(x-x^3)\,dx=\frac{-9}{4}$ جد قيمة $a\in R$

1998 دور (1)

Sol:

$$\int_{-1}^{a}(x-x^3)\,dx=\frac{-9}{4}\Rightarrow$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\right]_{-1}^{a}=\frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^4\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^4\right)-\frac{1}{4}=\frac{-9}{4}$$

$$\left[\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^4=-2\right].4$$

$$2a^2-a^4=-8$$

$$a^4-2a^2-8=0$$

$$(a^2-4)(a^2+2)=0$$

اما $a^2-4=0$

$a^2=4$

$a=\pm2$

او $a^2+2=0$ يهمل

2 اذا كان $\int_{a}^{b}(2x+3)\,dx=12$ وكان $a+2b=3$ جد قيمتي $a,b\in R$

1998 دور (2)

Sol:

$$\int_{a}^{b}(2x+3)=12\Rightarrow$$

$$\left[x^2+3x\right]_{a}^{b}=12$$

$b^2+3b-a^2+3a=12$ .....(1

$a=3-2b$ ....(2

نعوض قيمة (2) في (1)

$$b^2+3b-(3-2b)^2-3(3-2b)=12$$

$$b^2+3b-(9-12b+4b^2)-9-6b=12$$

$$b^2+3b-9+12b-4b^2-9+6b-12=0$$

$$\left[-3b^2+21b-30=0\right]\div-3$$

$$b^2-7b+10=0$$

$$(b-2)(b-5)=0$$

اما $b-2=0$

$b=2$

$a=3-4$

$a=-1$

او $b-5=0$

$b=5$

$a=3-10$

3

اذا كان $\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2$

جد قيمة $a \in R$

2004 دور (1)

Sol:

$$\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2 \Rightarrow$$

$$\int_a^4 x\left(x^2+9\right)^{\frac{-1}{2}} dx = 2$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^4 2x\left(x^2+9\right)^{\frac{-1}{2}} dx = 2$$

$$=\left[(\frac{1}{2})(2)(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2$$

$$=\left[\sqrt{x^2+9}\right]_a^4 = 2$$

$$=\sqrt{16+9}-\sqrt{a^2+9}=2$$

$$=\sqrt{25}-\sqrt{a^2+9}=2$$

$$=5-\sqrt{a^2+9}=2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+9}=3$$ بتربيع الطرفين

$$a^2+9=9$$

$$a^2=0 \Rightarrow a=0$$

4

اذا كانت $\int_a^4 3x\sqrt{x^2+9}\,dx = 0$

جد قيمتي a

2004 دور (2)

Sol:

$$3\frac{1}{2}\int_a^4 2x(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right]_a^4 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{(x^2+9)^3}\right]_a^4 = 0$$

$$=\left[\sqrt{(16+9)^3}-\sqrt{(a^2+9)^3}\right]=0$$

$$=\sqrt{(25)^3}=\sqrt{(a^2+9)^3}$$ بالتربيع

$$(25)^3=(a^2+9)^3$$ بالجذر التكعيبي

$$25=a^2+9$$

$$a^2=25-9$$

$$a^2=16$$

$$a=\mp 4$$



جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$$

5

2014 تمهيدي

Sol:

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$$

$$2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx$$

$$2\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right] = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_1^a$$

$$2(1-0) = \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\left[\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a - 1 = 2\right] \times 2$$

$$a^2 + a - 2 = 4$$

$$a^2 + a - 6 = 0$$

$$(a+3)(a-2) = 0$$

اما $a = -3$

او $a = 2$

2017 دور (2) تطبيقي- داخل

2018 دور (2) تطبيقي- داخل

2015 دور (1)

اذا كان المنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ يمتلك نقطة انقلاب (a,b) جد القيمة العددية للمقدار

$$\int_0^b f'(x)\, dx - \int_0^a f''(x)\, dx\, ,$$

6

2017 دور (1) احيائي - داخل

2015 دور (4) رصافة

2019 دور (1) احيائي - خارج

Sol:

$$f'(x) = 3(x-3)^2$$

$$f''(x) = 6(x-3)$$

$$6(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1\, ,\ (3,1)$$ نقطة انقلاب

$$(3,1) = (a,b) \Rightarrow a = 3\, ,\ b = 1$$

$$\int_0^b f'(x)\, dx - \int_0^a f''(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 3(x-3)^2\, dx - \int_0^3 6(x-3)\, dx$$

$$= \left[(x-3)^3\right]_0^1 - \left[3(x-3)^2\right]_0^3$$

$$= \left[(1-3)^3 - (0-3)^3\right] - \left[3(3-3)^2 - 3(0-3)^2\right]$$

$$= [-8+27] - [0-27]$$

$$= 19 + 27 = 46$$

7 — 2019 دور (3) احيائي

جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان

$$\int_{1}^{a}(x+\frac{1}{2})\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx$$

Sol:

$$\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_1^a = 2\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left[\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}a\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = 2\left[\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0\right]$$

$$\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-1 = 2[1-0]$$

$$\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2} = 3].2$$

$$a^2+a=6$$

$$a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0$$

$$a+3=0 \Rightarrow a=-3$$

$$a-2=0 \Rightarrow a=2$$

8 — 2016 تمهيدي

لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى (-5) جد

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$

Sol:

$$f'(x)=2x+2 \Rightarrow 2x+2=0$$

$$2x=-2 \Rightarrow x=-1$$

$$f''(x)=2>0$$ دالة تمتلك نهاية صغرى محلية

$$\therefore (-1,-5)$$ نقطة النهاية الصغرى المحلية تنتمي f(x)

$$-5=1-2+k \Rightarrow k=-4$$

$$f(x)=x^2+2x-4$$

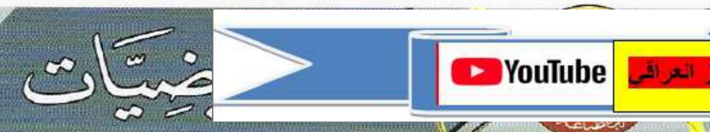
$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2}(x^2+2x+4)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-4x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}(2)^3+(2)^2-4(2)\right)-\left(\frac{1}{3}(-1)^3+(-1)^2-4(-1)\right)$$

$$=\left(\frac{8}{3}+4-8\right)-\left(-\frac{1}{3}+1+4\right)$$

$$=\frac{8}{3}-4+\frac{1}{3}-5=3-9=-6$$



6 الدالة المطلقة

1 جد قيمة $\int_{-3}^{4} |x|\, dx$

2011 دور (1)

Sol:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x\ , & x < 0 \\ x\ , & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^{(+)}} f(x) = 0 \quad L_1\ ,\ \lim_{x \to 0^{(-)}} f(x) = 0 \quad L_2$$

$$\because L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

الغاية موجودة — الدالة مستمرة

$$\int_{-3}^{4} f(x)\, dx = \int_{-3}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{4} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-3}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{4} x\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{4}$$

$$= \left[0 - (-\frac{9}{2})\right] + [8 - 0]$$

$$= \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2} = 12.5$$

2 $\int_{-2}^{4} |3x - 6|\, dx = 30$

2014 دور (3)
2017 دور (2) احيائي - داخل
2019 تمهيدي احيائي

Sol:

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$|3x - 6| = \begin{cases} 3x - 6\ , & x \geq 2 \\ -3x + 6\ , & x < 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^{(+)}} f(x) = 0\ L_1\ ,\ \lim_{x \to 2^{(-)}} f(x) = 0\ L_2$$

$\because L_1 = L_2$ الغاية موجودة

$\because f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 0$ الدالة مستمرة

$$\int_{-2}^{4} |3x - 6|\, dx = \int_{-2}^{2} (-3x + 6)\, dx + \int_{2}^{4} (3x - 6)\, dx$$

$$= \left[-\frac{3}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_{2}^{4}$$

$$= [(-6 + 12) - (-6 - 12)] + [(24 - 24) - (6 - 12)]$$

$$= (6 + 18) + (6) = 30$$

3 جد $\int_{0}^{2} |x-1|\, dx$

2017 دور (2) احيائي - داخل

Sol :

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 \ , & x \geq 1 \\ -x+1 \ , & x<1 \end{cases}$$

$f(1)=1-1=0$

$\lim_{x\to 1^{(+)}} f(x)=0\ L_1 \ , \ \lim_{x\to 1^{(-)}} f(x)=0\ L_2$

$\because L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow$ الغاية موجودة

$\because f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=0$ الدالة مستمرة عند الـ (1)

$$\int_{0}^{2} |x-1|\, dx = \int_{0}^{1} (-x+1)\, dx + \int_{1}^{2} (x+1)\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^2$$

$$= \left[(-\frac{1}{2}+1)-(0)\right] + \left[(2-2)-(\frac{1}{2}-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

4 لتكن $f(x)=|2x-4|$

جد $\int_{-3}^{4} f(x)\, dx$

2020 دور (1) تطبيقي

Sol :

$2x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & x \geq 2 \\ -2x+4 & x<2 \end{cases}$$

-3 ——∫—— 2 ——∫—— 4

$$\int_{-3}^{4} f(x) = \int_{-3}^{2} (-2x+4)dx + \int_{2}^{4} (2x-4)\, dx$$

$$= \left[\frac{-2x^2}{2} + 4x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{2x^2}{2} - 4x\right]_{2}^{4}$$

$$= [(-4+8)-(-9-12)] + [(16-16)-(4-8)]$$

$$= (21+4)+(0+4)$$

$$= 25+4$$

$$= 29$$

7 الدالة الشطرية

1 — 2014 دور (1) — 2020 تمهيدي احيائي

اذا كان $f(x)=\begin{cases}3x , & \forall x \geq 0 \\ 2x , & \forall x<0\end{cases}$

جد $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

Sol:

$f(0)=0$

$\lim_{x \to 0^{(+)}} f(0)=0 \quad L_1 \quad , \lim_{x \to 0^{(-)}} f(0)=0 \quad L_2$

$\because L_1=L_2=0$ الغاية موجودة

$\because f(0)=\lim_{x \to 0} f(x)=0$ الدالة مستمرة لانها كثيرة الحدود

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{3} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0} 2x\,dx+\int_{0}^{3}(3x^2)\,dx$$

$$=\left[x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x^3\right]_{0}^{3}=-1+27=26$$

2 — 2016 دور (2) خارج — 2018 دور (3) تطبيقي - داخل

اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x , & \forall x \geq 3 \\ 6 , & \forall x<3\end{cases}$

جد $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$

Sol:

$f(3)=(2)(3)=6$

$\lim_{x \to 3^{(+)}} f(x)=6=L_1$

$\lim_{x \to 3^{(-)}} f(x)=6=L_2$

$\because L_1=L_2=6 \Rightarrow$ الغاية موجودة

$\because f(3)=\lim_{x \to 3} f(x)=6$ الدالة مستمرة عند الـ (3)

$$\int_{1}^{4} f(x)\,dx=\int_{1}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{4} f(x)dx$$

$$=\int_{1}^{3} 6\,dx+\int_{3}^{4} 2x\,dx$$

$$=[6x]_1^3+\left[x^2\right]_3^4$$

$$=[18-6]+[16-9]$$

$$=12+7$$

$$=19$$



اذا كانت

$$f(x)\begin{cases} 2x+1 & \forall x \geq 1 \\ 3 & \forall x < 1 \end{cases}$$

جد $\int_0^5 f(x)\,dx$

3

2019 دور (1) احيائي

Sol:

$$\lim_{x\to 1^+} 2x+1 = 2(1)+1 = 3 \quad L_1$$

$$\lim_{x\to 1^-} 3 = 3 \; L_2$$

$$L_1 = L_2$$ الغاية موجودة

$$f(1) = 2(1)+1 = 3$$

$$\therefore f(1) = \lim_{x\to 1}$$ الدالة مستمرة

$$\int_0^5 f(x) = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx$$

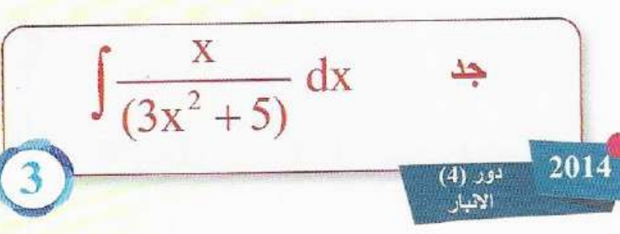
$$= \int_0^1 3\,dx + \int_1^5 2x+1\,dx$$

$$[3x]_0^1 + \left[x^2+2x\right]_1^5$$

$$[3(1)-0] + \left[(5)^2+2(2)-(1+2)\right]$$

$$\not{3} + \left[25+10-\not{3}\right]$$

$$=35$$



8 اللوغارتم الطبيعي

1 اذا كانت $y = e^{x^2}\ Ln|2x|$ جد $\frac{dy}{dx}$

2018 دور (3) تطبيقي

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}\left(\frac{2}{2x}\right) + Ln|2x|\left[e^{x^2}(2x)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}e^{x^2} + 2xLn|2x|e^{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}\left(\frac{1}{x} + 2xLn|2x|\right)$$

2 اذا كانت $y = x^2 Ln|x|$ جد $\frac{dy}{dx}$

2019 دور (3) تطبيقي

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + Ln|x| . 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = x + 2x\ Ln|x|$$

$$\frac{dy}{dx} = x + x\ Ln|x^2|$$

3 جد $\int \frac{x}{(3x^2+5)}\,dx$

2014 دور (4) الانبار

Sol:

$$\int \frac{x}{(3x^2+5)}\,dx = \int \frac{1}{6}\frac{6x}{(3x^2+5)}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln(3x^2+5) + c$$

4 جد $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx$

2011 دور (2)
2013 دور (1)
2018 دور (3) احيائي - خارج

Sol:

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx = \left[\ln|x^3+4x+1|\right]_0^1$$

$$= \ln 6 - \ln 1$$

$$= \ln 6$$

5 جد $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$

2012 تمهيدي — 2015 تمهيدي — 2020 دور (1) تطبيقي

Sol:

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \left[\ln|x^2+9|\right]_0^4$$

$$= \ln 25 - \ln 9 = \ln\frac{25}{9}$$

6 جد $\int \tan x\,dx$

2016 تمهيدي

Sol:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= -\ln|\cos x| + c$$

7 جد $\int \tan^3 2x\,dx$

2017 دور (2) احيائي - داخل

Sol:

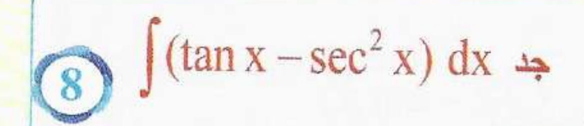
$$\int \tan^3 2x\,dx = \int \tan^2 2x.\tan 2x\,dx$$

$$= \int (\sec^2 2x - 1)\tan 2x\,dx$$

$$= \int (\tan 2x \sec^2 2x - \tan 2x)\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\tan 2x(2\sec^2 2x) + \frac{1}{2}\left(\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c$$



8 جد $\int (\tan x - \sec^2 x)\,dx$

2018 دور (1) احيائي - داخل

Sol:

$$\int (\tan x - \sec^2 x)\,dx$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx - \int \sec^2 x\,dx$$

$$= -\ln|\cos x| - \tan x + c$$

9 جد $\int \cot^3 5x\,dx$

2018 دور (3) تطبيقي - داخل — 2020 تمهيدي تطبيقي

Sol:

$$\int \cot^3 5x\,dx = \int \cot^2 5x.\cot 5x\,dx$$

$$= \int (\csc^2 5x - 1)\cot 5x\,dx$$

$$= \int (\cot 5x.\csc^2 5x - \cot 5x)\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{5}\cot 5x(5\csc^2 5x) - \frac{1}{5}\frac{5\cos 5x}{\sin 5x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{10}\cot^2 5x - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + c$$

10 جد $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{(2+\tan x)} dx$

2011 دور (1) — 2018 دور (1) تطبيقي - خارج — 2019 دور (3) تطبيقي

Sol:

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{(2+\tan x)} dx$$

$$= [\ln(2+\tan x)]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\ln(2+\tan\frac{\pi}{4}) - \ln(2+\tan-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$= \left[\ln(2+\tan\frac{\pi}{4}) - \ln(2-\tan\frac{\pi}{4})\right]$$

$$= \ln 3 - \ln 1$$

$$= \ln 3$$

2018 دور (3) احيائي

11 جد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x.\sin x \; dx$

2012 تمهيدي

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x.\sin x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\left[(\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|) - (\ln|\cos 0|)\right]$$

$$= -\left[\ln\left|\frac{1}{2}\right| - \ln|1|\right]$$

$$= -\ln\frac{1}{2}$$

12 جد $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \; dx$



2016 دور (1) خارج

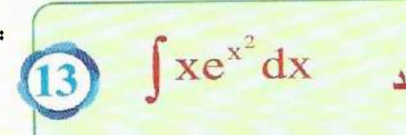
Sol:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = [\text{Ln}\sin x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \text{Ln}\sin\frac{\pi}{2} - \text{Ln}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \text{Ln}1 - \text{Ln}\frac{1}{2} = \text{Ln}.\text{Ln}1 + \text{Ln}2$$

$$= \text{Ln}2$$



13 جد $\int xe^{x^2} dx$

2013 دور (3)

Sol:

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x.e^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

14 جد $\int \sec^2 8x \; e^{\tan 8x} \; dx$

2015 دور (1) نازحين

Sol:

$$\int \sec^2 8x \; e^{\tan 8x} \; dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (8)\sec^2 8x \; e^{\tan 8x} \; dx$$

$$= \frac{1}{8}e^{\tan 8x} + c$$



15 جد $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x \, dx$

2011 دور (1)
2013 دور (2)
2016 تمهيدي

Sol:

$$\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(1+e^x)^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+e^1)^3 - (1+e^0)^3\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+e)^3 - (1+1)^3\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+e)^3 - 8\right]$$



16 جد $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} \, dx$

2012 دور (1)
2014 دور (2)
2016 دور (2)

Sol:

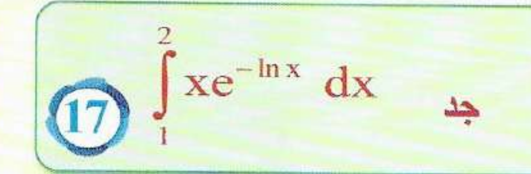
$$\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} \, dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln 3}^{\ln 5}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3})$$

$$= \frac{1}{2}\left[(e^{\ln 5})^2 - (e^{\ln 3})^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(5)^2 - (3)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}[25-9] = \frac{1}{2}(16) = 8$$



17 جد $\int_1^2 x e^{-\ln x} \, dx$

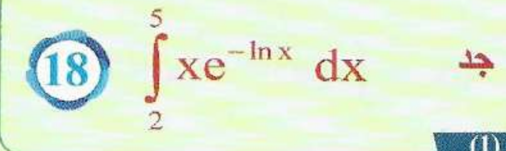
2014 خارج القطر

Sol:

$$\int_1^2 x e^{-\ln x} \, dx = \int_1^2 x(e^{\ln x})^{-1} \, dx$$

$$= \int_1^2 x.x^{-1} dx = \int_1^2 dx$$

$$= [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$$



18 جد $\int_2^5 x e^{-\ln x} \, dx$

2015 دور (1) نازحين

Sol:

$$\int_2^5 x e^{-\ln x} \, dx = \int_2^5 x(e^{\ln x})^{-1} \, dx$$

$$= \int_2^5 x.x^{-1} dx = \int_2^5 dx$$

$$= [x]_2^5 = 5 - 2 = 3$$

19 جد $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx$

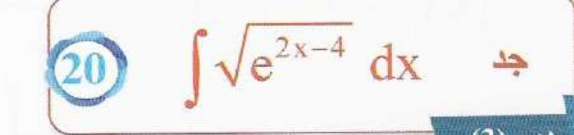
2012 دور (2) — 2015 خارج — 2015 دور (2) — 2015 تمهيدي تطبيقي — 2015 تمهيدي احيائي

Sol:

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = (e^{\sqrt{4}}) - (e^{\sqrt{1}})$$

$$= e^2 - e$$



20 جد $\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx$

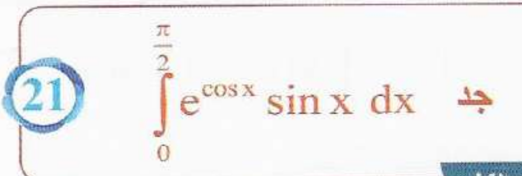
2014 دور (3)

Sol:

$$\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx = \int \sqrt{e^{2(x-2)}}\, dx$$

$$= \int e^{x-2} dx$$

$$= e^{x-2} + c$$



21 جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx$

2011 خارج القطر

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} (-\sin x)\, dx$$

$$= \left[-e^{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

2020 دور (1) احيائي

$$= (-e^{\cos\frac{\pi}{2}}) - (-e^{\cos 0})$$

$$= -e^0 + e^1 = -1 + e$$

22 جد $\int_1^3 3x\, e^{\ln x} dx$

2017 دور (2) تطبيقي - خارج

Sol:

$$\int_1^3 3x\, e^{\ln x} dx = \int_1^3 3x(x)\, dx$$

$$= \int_1^3 3x^2\, dx$$

$$= \left[x^3\right]_1^3 = 27 - 1 = 26$$

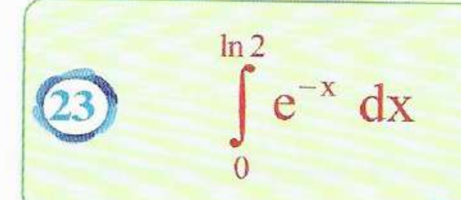
جد $\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

2018 دور (1) احيائي - داخل

ملاحظة

السؤال محل جدل بسبب كون الدالة غير مستمرة عند الصفر ولكن الجواب النموذجي اجاز اجراء التكامل والتعويض





23 $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\ dx$

2017 دور (1) تطبيقي - خارج

Sol:

$$\int_0^{\ln 2} e^{-x}\ dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$= -(e^{-\ln 2} - e^0)$$

$$= -\left[(e^{\ln 2})^{-1} - 1)\right]$$

$$= -(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{2}$$

24 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sin y} \cos y\ dy$

2017 دور (1) تطبيقي - خارج

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sin y} \cos y\ dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sin y}(2\cos y)\ dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2\sin y}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2\sin\frac{\pi}{2}} - e^{2\sin 0}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^2 - e^0\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

25 $\int \sec^2 3x\ e^{\tan 3x}\ dx$

2018 تمهيدي احيائي

2018 دور (1) احيائي - خارج

2019 دور (1) احيائي

Sol:

$$\int \sec^2 3x\ e^{\tan 3x}\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\int 3\sec^2 3x\ e^{\tan 3x}\ dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{\tan 3x} + c$$

26 جد $\int x\ e^{\cos x^2} \sin x^2\ dx$

2018 دور (2) تطبيقي - خارج

Sol:

$$\int x\ e^{\cos x^2} \sin x^2\ dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int e^{\cos x^2}(-2x)\sin x^2\ dx$$

$$= \frac{-1}{2}e^{\cos x^2} + c$$




27 $\int \frac{5x^2}{3x^3+7}dx$

2018 دور (2) احيائي - خارج

Sol:

$$\int \frac{5x^2}{3x^3+7}dx$$

$$=\frac{5}{9}\int (\frac{9}{5})\frac{5x^2}{3x^3+7}dx$$

$$=\frac{5}{9}\ln|3x^3+7|+c$$

28 $\int_1^2 8xe^{-Lnx}\ dx$

2019 دور (1) تطبيقي - خارج

Sol:

$$\int_1^2 8xe^{Lnx^{-1}}\ dx$$

$$\int_1^2 8x.x^{-1}\ dx \Rightarrow \int_1^2 8dx$$

$$[8x]_1^2 = 8(2)-8(1)$$

$$=16-8$$

$$=8$$

29 $\int_1^3 xe^{-Lnx}\ dx$

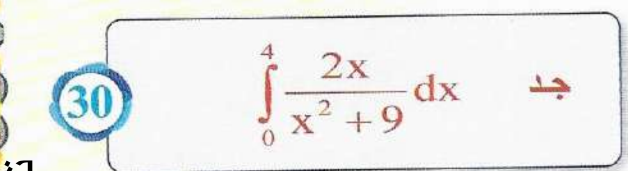
2019 تمهيدي احيائي

Sol:

$$\int_1^3 xe^{Lnx^{-1}}\ dx$$

$$\int_1^3 x.x^{-1}\ dx \Rightarrow \int_1^3 dx$$

$$[x]_1^0 = 3-1=2$$



30 جد $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}dx$

2019 دور (3) احيائي

Sol:

$$\left[Ln|x^2+9|\right]_0^4$$

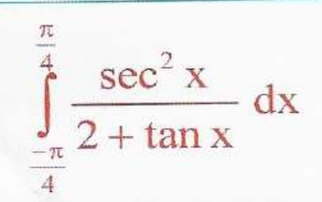
$$\left[Ln|(4)^4+9|-Ln(0)+9\right]$$

$$Ln|25|-Ln9$$

$$Ln5^2-Ln3^2 \Rightarrow 2Ln5-2Ln3$$

$$2Ln\frac{5}{3}$$

31 $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}dx$



2019 دور (3) تطبيقي

Sol:

$$\left[Ln|2+\tan x|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

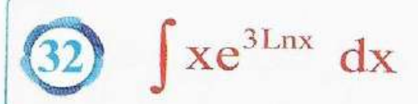
$$Ln\left|2+\tan\frac{\pi}{4}\right|-Ln\left|2+\tan\frac{-\pi}{4}\right|$$

$$\left[Ln|2+1|\right]-\left[Ln2-1\right]$$

$$Ln3-Ln1$$

$$=Ln3$$





32 $\int xe^{3Lnx}\, dx$

2020 دور (1) تطبيقي

Sol:

$$\int x\, e^{Ln\, x^3} dx$$

$$\int x.x^3\, dx$$

$$\int x^4\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + c$$

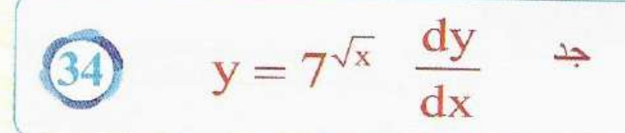
33 $y = e^{-5x^2+3x+5}$ جد $\frac{dy}{dx}$

2020 تمهيدي احيائي

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-5x^2+3x+5} \,.\, -10x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = (-10x+3)e^{-5x^2+3x+5}$$



34 $y = 7^{\sqrt{x}}$ جد $\frac{dy}{dx}$

2020 تمهيدي تطبيقي

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = 7^{\sqrt{x}}.Ln7.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{7^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.Ln7$$

35 $y = x^3e^x$ جد $\frac{dy}{dx}$

2020 تمهيدي تطبيقي

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = x^3.e^x + e^x.3x^2$$

$$= x^3e^x + 3x^2.e^x$$

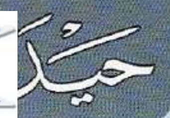
$$= x^2e^x(x+3)$$

36 $y = Ln(\tan^2 x)$ جد $\frac{dy}{dx}$

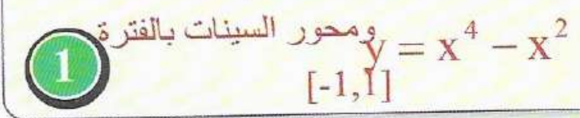
Sol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan^2 x}.2\tan x.\sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sec^2 x}{\tan x}$$

9 المساحات



1 جد المســـاحة المحددة بمنحني الدالة $y = x^4 - x^2$ ومحور السينات بالفترة $[-1,1]$

Sol:

$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$

اما $x = 0 \in [-1,1]$

او $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1 \in [-1,1]$

-1 ∫ 0 ∫ 1

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}$$

$$= [0] - \left[\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15}$$

$$A_2 = \int_{0}^{+1} (x^4 - x^2)\,dx$$

$$A_2 = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{+1} = \left[\frac{-1}{5} - \frac{1}{3}\right] - [0]$$

$$= \frac{-2}{15}$$

1996 دور (1)

2003 دور (1)

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$= \left|\frac{-2}{15}\right| + \left|\frac{-2}{15}\right|$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\text{unit}^2$$

2 جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

Sol:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ محور السينات

2020 تمهيدي احيائي

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x(x-2)(x-1) = 0$

اما $x = 0$, أو $x = 2$, أو $x = 1$

$$A_1 = \int_{0}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1$$

$$A_1 = \left[(\frac{1}{4} - 1 + 1) - (0)\right] = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2$$

$$A_2 = \left[(4 - 8 + 4) - (\frac{1}{4} - 1 + 1)\right]$$

$$A_2 = -\frac{1}{4}$$

2006 تمهيدي

2013 دور (1)

1996 دور (2)

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\text{unit}^2$$

3 جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^4 - 4x^2$ ومحور السينات بالفترة $[1,3]$

1998 دور (1)

Sol:

$f(x) = x^4 - 4x^2$

$x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$x = -2 \notin [1,3]\ ,\ x = 2 \in [1,3]$

$$A_1 = \int_1^2 (x^4 - 4x^2)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\right]_1^2$$

$$A_1 = \left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right)$$

$$A_1 = \frac{31}{5} - \frac{28}{3} = \frac{93 - 140}{15}$$

$$A_1 = \frac{-47}{15}$$

$$A_2 = \int_2^3 (x^4 - 4x^2)\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\right]_2^3$$

$$A_2 = \left(\frac{243}{5} - \frac{108}{3}\right) - \left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}\right)$$

$$A_2 = \frac{211}{5} - \frac{76}{3}$$

$$A_2 = \frac{633 - 380}{15} = \frac{253}{15}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left|\frac{-47}{15}\right| + \left|\frac{253}{15}\right| = \frac{300}{15}$$

$$A = 20\ \text{unit}^2$$



4 جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = x^3 - 9x$ ومحور السينات $[-3,3]$

2001 دور (1)

Sol:

$f(x) = x^3 - 9x$ محور السينات

$x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0$

$x = 0 \in [-3,3]$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \in [-3,3]$ لايجزأ

$$A_1 = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}$$

$$A_1 = \left[0 - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right)\right] = \boxed{\frac{81}{4}}$$

$$A_2 = \int_0^3 (x^3 - 9x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3$$

$$A_2 = \left[\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right) - (0)\right] = \boxed{\frac{-81}{4}}$$

$$A = |A_1| + |A_2| \Rightarrow A = \left|\frac{81}{4}\right| + \left|\frac{-81}{4}\right|$$

$$A = \frac{81}{2}\text{unit}^2$$

2015 دور (2)





5

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات بالفترة $[-2,2]$

2007 تمهيدي

2004 دور (2)

Sol:

$f(x) = x^3 - 4x$ محور السينات

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

أما $x = 0 \in [-2,2]$

أو $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

ينتمي للفترة ولكن لايجزأ

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$A_1 = [0 - (4 - 8)]$$

$$A_1 = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$A_2 = [(4 - 8) - (0)]$$

$$A_2 = -4$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = |4| + |-4|$$

$$A = 8\text{unit}^2$$

6

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات

2005 دور (1)

2019 دور (2) احيائي

2019 دور (1) احيائي - خارج

Sol:

$f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$ محور السينات

$x(x^2 + 4x + 3) = 0$

$x(x+3)(x+1) = 0$

أما $x = 0$, $x = -3$ أو $x = -1$

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)\, dx$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-1}$$

$$A_1 = \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right)\right]$$

$$A_1 = \left[-\frac{80}{4} + \frac{104}{3} - \frac{24}{2}\right] = \boxed{\frac{8}{3}}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)\, dx$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$A_2 = \left[(0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right)\right]$$

$$A_2 = \left[\frac{-3 + 16 - 18}{12}\right] = \frac{-5}{12}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left|\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{37}{12}\text{unit}^2$$

7 جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 + 4$ ومحور السينات بالفترة $[-2,2]$

2008 تمهيدي — 2010 تمهيدي

Sol:

$f(x) = 3x^2 + 4$

$3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -4$ الفترة لاتجزأ

$A = \left|\int_{-2}^{2} (3x^2 + 4)\, dx\right|$

$A = \left|[x^3 + 4x]_{-2}^{2}\right|$

$A = |(8+8) - (-8-8)|$

$A = |16+16| = 32 \text{unit}^2$

8 جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = (x-1)^3$ ومحور السينات بالفترة $[-1,3]$

2012 دور (1)

Sol:

$f(x) = (x-1)^3 \Rightarrow (x-1)^3 = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [-1,3]$

$A_1 = \int_{-1}^{1} (x-1)^3 dx = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_{-1}^{1}$

$A_1 = [0 - 4] = -4$

$A_2 = \int_{1}^{3} (x-1)^3 dx = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_{1}^{3}$

$A_2 = [4 - 0] = 4$

$A = |A_1| + |A_2| \Rightarrow A = |-4| + |4|$

$A = 8 \text{unit}^2$

9 جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x^2$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 2 , x = 1$

2012 دور (2)

Sol:

$x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0 \notin [1,2]$

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [1,2]$

$A = \int_{1}^{2} (x^4 - x^2)\, dx$

$A = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$A = \left[\frac{32}{5} - \frac{4}{2}\right] - \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right]$

$A = \frac{32}{5} - 2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$

$A = \frac{32-1}{5} - \frac{3}{2}$

$A = \frac{31}{5} - \frac{3}{2} = \frac{62-15}{10}$

$A = \frac{47}{10} \text{unit}^2$

10 جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1 , x = 3$

2013 دور (3)

Sol: محور السينات

$$f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$$

$$A = \left| \int_1^3 x^2 \, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 \right|$$

$$A = \left| 9 - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{26}{3} \right|$$

$$A = \frac{26}{3} \text{unit}^2$$

11 جد المســـاحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 4$ ومحور السينات بالفترة $[-2,3]$

2014 تمهيدي

Sol: محور السينات

$$f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$x = 2 \in [-2,3]$ يجزأ

$x = -2 \in [-2,3]$ لايجزأ

$$A_1 = \int_{-2}^{2} (x^2 - 4) \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - 4x \right]_{-2}^{2}$$

$$A_1 = \left[(\frac{8}{3} - 8) - (-\frac{8}{3} + 8) \right]$$

$$A_1 = \frac{-16}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-32}{3}$$

$$A_2 = \int_2^3 (x^2 - 4) \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - 4x \right]_2^3$$

$$A_2 = \left[(9 - 12) - (\frac{8}{3} - 8) \right]$$

$$A_2 = \left[-3 + \frac{16}{3} \right] = \frac{7}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left| \frac{-32}{3} \right| + \left| \frac{7}{3} \right|$$

$$A = \frac{39}{3}$$

$$A = 13 \text{ unit}^2$$



جد المســـاحة المحددة بالمنحني $y = x^3 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1 , x = -1$

12

2017 دور (1) احيائي - داخل

Sol :

$f(x) = x^3 - x$ محور السينات

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

أما $x = 0 \in [-1,1]$

أو $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \in [-1,1]$

$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\ dx$ لايجزأ

$A_1 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$

$A_1 = \left[(0) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})\right]$

$A_1 = \frac{1}{4}$

$A_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - x)\ dx$

$A_2 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$A_2 = \left[(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (0)\right] = -\frac{1}{4}$

$A = |A_1| + |A_2|$

$A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right|$

$A = \frac{1}{2}\ unit^2$

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ ومحور السينات بالفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



13

Sol :

$f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ محور السينات

$1 - 2\sin^2 x = 0$

$\cos 2x = 0 \Rightarrow \left[2x = \frac{\pi}{2}\right] \div 2$

$x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$A_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x)\ dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$A_1 = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = \frac{1}{2}$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)\ dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$A_2 = \frac{1}{2}\left[\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{1}{2}$

$A = |A_1| + |A_2|$

$A = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right|$

$A = 1\ unit^2$

2001 دور (2)

2016 دور (2)

نفس الحل

$f(x) = \cos 2x$

2003 دور (2)




جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=2\cos^2 x-1$ ومحور السينات بالفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **14**

2006 دور (2)
2016 دور (1) خارج القطر

Sol :

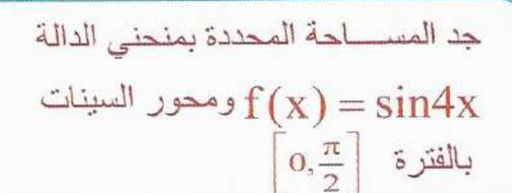
$f(x)=2\cos^2 x-1$

$2\cos^2 x-1=0$

$\cos 2x=0$

نفس الحل السابق

$A=1\ \text{unit}^2$



جد المســـاحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=\sin 4x$ ومحور السينات بالفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **15**

2007 دور (1)

Sol :

$f(x)=\sin 4x \Rightarrow \sin 4x=0$

$4x=0 \Rightarrow x=0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لايجزأ

$4x=\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{4} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ يجزأ

$4x=2\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لايجزأ

$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 4x)\,dx=\left[-\frac{1}{4}\cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

2018 دور (1) احيائي - داخل

$A_1=-\frac{1}{4}[\cos\pi-\cos 0]$

$A_1=-\frac{1}{4}[-2] \Rightarrow A_1=\frac{1}{2}$

$A_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 4x)\,dx$

$A_2=\left[-\frac{1}{4}\cos 4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$A_2=-\frac{1}{4}[\cos 2\pi-\cos\pi]$

$A_2=-\frac{1}{4}(2) \Rightarrow A_2=\frac{-1}{2}$

$A=|A_1|+|A_2|$

$A=\left|\frac{1}{2}\right|+\left|-\frac{1}{2}\right|$

$A=1\ \text{unit}^2$



16 جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=\sin 2x$ ومحور السينات بالفترة $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2008 دور (2)

Sol :

$f(x)=\sin 2x \Rightarrow \sin 2x=0$

$2x=0 \Rightarrow x=0 \in \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ يجزأ

$2x=\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \in \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ لايجزأ

$2x=2\pi \Rightarrow x=\pi \in \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ لايجزأ

$A_1=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}(\sin 2x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$

$A_1=-\frac{1}{2}\left[\cos 0-\cos 2\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$

$A_1=-\frac{1}{2}[1-(-1)]=-\frac{1}{2}(2)$

$A_1=-1$

$A_2=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$A_2=-\frac{1}{2}[\cos\pi-\cos 0]$

$A_2=-\frac{1}{2}[-1-1]$

$A_2=1$

$A=|A_1|+|A_2|$

$A=|-1|+|1| \Rightarrow A=2\ \text{unit}^2$



17 جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=\sin 3x$ ومحور السينات بالفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Sol :

$\sin 3x=0$

$3x = 0 \Rightarrow x=0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$3x = \pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{3} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$3x = 2\pi \quad x=\frac{2\pi}{3} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$0 \quad \int \quad \frac{\pi}{3} \quad \int \quad \frac{\pi}{2}$

$A_1=\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}3\sin 3x\,dx$

$=\left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left[\frac{-1}{3}\cos \cancel{3}\frac{\pi}{\cancel{3}}\right]-\left[\frac{-1}{3}\cos 0\right]$

$=\frac{1}{3}-\left[\frac{-1}{3}\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$A_2=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}3\sin 3x\,dx$

$=\left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left[\frac{-1}{3}\cos 3\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{-1}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right]$

$=0-\left[+\frac{1}{3}\right]=-\frac{1}{3}$

2016 دور (2)
2017 دور (1) احيائي - خارج
2018 تمهيدي احيائي

$A=|A_1|+|A_2|$

$=\left|\frac{2}{3}\right|+\left|\frac{-1}{3}\right|$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{1}=1\ \text{unit}^2$

18

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = \cos x$ و محور السينات بالفترة $[-\pi, \pi]$

2018 دور (1) تطبيقي - خارج

Sol:

$$y = \cos x \Rightarrow \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi] \quad \text{يجزأ}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi] \quad \text{يجزأ}$$

$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = [\sin x]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}}$$

$$A_1 = \left[\sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin(-\pi)\right]$$

$$A_1 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \; dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_2 = \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})\right]$$

$$A_2 = [1 - (-1)]$$

$$A_2 = 2$$

$$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \; dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$A_3 = \left[\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$A_3 = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

$$A = |-1| + |2| + |-1|$$

$$A = 4 \text{ unit}^2$$



19

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$$f(x) = x^2 \;,\; g(x) = x^4 - 12$$

1997 دور (2) — 2008 دور (1) — 2008 خارج — 2015 دور (2) خارج — 2015 دور (3) — 2016 دور (2) خارج

Sol:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = x^4 - 12$$

$$x^4 - x^2 - 12 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$$

يهمل (x^2+3)

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$A = \int_{-2}^{2} (x^4 - x^2 - 12)\, dx$$

$$A = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - 12x\right]_{-2}^{2}$$

$$A = \left[(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24) - (\frac{-32}{5} + \frac{8}{3} + 24)\right]$$

$$A = \left[\frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48\right]$$

$$A = \frac{192 - 80 - 720}{15}$$

$$A = \frac{-608}{15}$$

$$A = \left|\frac{-608}{15}\right| = \frac{608}{15} \text{ unit}^2$$



20

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=x, g(x)=\sqrt[3]{x}$ بالفترة $[-1,1]$

1999 دور (1)

2005 تمهيدي

Sol:

$$f(x)=g(x)$$

$$x=\sqrt[3]{x}$$ بالتكعيب

$$x^3=x \Rightarrow x-x^3=0 \Rightarrow x(1-x^2)=0$$

$$x=0\in[-1,0]$$ يجزأ

$$x^2=1 \Rightarrow x=\pm1\in[-1,0]$$ لايجزأ

$$A_1=\int_{-1}^{0}(x^{\frac{1}{3}}-x)\,dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=\left[(0)-(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})\right]=-\frac{1}{4}$$

$$A_2=\int_{0}^{1}(\frac{1}{3}-x)\,dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$A_2=\left[(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})-(0)\right]=\frac{1}{4}$$

$$A=|A_1|+|A_2|$$

$$A=\left|\frac{-1}{4}\right|+\left|\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{2}\ \text{unit}^2$$

21

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=2-x^2, g(x)=x$ بالفترة $[-2,2]$

1999 دور (2)

Sol:

$$f(x)=g(x)$$

$$2-x^2=x \Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

أما $x+2=0 \Rightarrow x=-2\in[-2,2]$ لايجزأ

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1\in[-2,2]$ يجزأ

$$A_1=\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx$$

$$A_1=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{1}$$

$$A_1=\left[(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2)-(\frac{-8}{3}+2+4)\right]$$

$$A_1=\left[(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2+\frac{8}{3}-6)\right]$$

$$A_1=\left[(3-8+\frac{1}{2})\right]=-\frac{9}{2}$$

$$A_2=\int_{1}^{2}(x^2+x-2)\,dx$$

$$A_2=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}$$

$$A_2=\left[(\frac{8}{3}+2-4)-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2)\right]$$

$$A_2=(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2)$$

$$A_2=(\frac{7}{3}-\frac{1}{2})=\frac{14-3}{6}$$

$$A_2=\frac{11}{6}$$

$$A=|A_1|+|A_2|$$

$$A=\left|\frac{-9}{2}\right|+\left|\frac{11}{6}\right|$$

$$A=\frac{19}{3}\ \text{unit}^2$$







22 جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x)=x^2, g(x)=2x$

بالفترة $[1,3]$

2002 دور (1)

Sol:

$f(x)=g(x)$

$x^2=2x \Rightarrow x^2-2x=0$

$x(x-2)=0 \Rightarrow$ أما $x=0 \notin [1,3]$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2 \in [1,3]$ يجزأ

$$A_1=\int_1^2 (x^2-2x)\,dx$$

$$A_1=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^2=\left[(\frac{8}{3}-4)-(\frac{1}{3}-1)\right]$$

$$A_1=(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}$$

$$A_2=\int_2^3 (x^2-2x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$

$$A_2=\left[(9-9)-(\frac{8}{3}-4)\right]$$

$$A_2=-\frac{4}{3}$$

$$A=|A_1|+|A_2|$$

$$A=\left|\frac{-2}{3}\right|+\left|\frac{-4}{3}\right|$$

$$A=2\ \text{unit}^2$$

23 جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x)=3x^2,\ g(x)=x^4-4$

2002 دور (2)

2020 دور(1) تطبيقي

Sol:

$f(x)=g(x)$

$3x^2=x^4-4 \Rightarrow x^4-3x^2-4$

$(x^2-4)(x^2+1)=0$

يهمل

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

$$A_1=\int_{-2}^{2}(x^4-3x^2-4)\,dx$$

$$A=\left[\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right]_{-2}^{2}$$

$$A=\left[(\frac{32}{5}-8-8)-(\frac{-32}{5}+8+8)\right]$$

$$A=\left[\frac{64}{5}-32\right]$$

$$A=\frac{64-160}{5}=\frac{-96}{5}$$

$$A=\left|\frac{-96}{5}\right|$$

$$A=\frac{96}{5}\ \text{unit}^2$$

24
جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين
$f(x)=x\ ,\ g(x)=\sqrt{x}$

2011 دور (1)

Sol:

$f(x)=g(x)$

$x=\sqrt{x}$ بالتربيع $\Rightarrow x^2=x$

$x-x^2=0\Rightarrow x(1-x)=0$

أما $x=0$, أو $x=1$

$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$A=\left[(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})-(0)\right]$

$A=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}$

$A=\left|\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}\ \text{unit}^2$

25
جد المساحة المحصورة بين المنحنين
$y=x^4-8\ ,\ y=2x^2$

2012 تمهيدي

Sol:

$x^4-8=2x^2$

$x^4-2x^2-8=0$

$(x^2-4)(x^2+2)=0$

يهمل

$x^2-4=0$

$x^2=4\Rightarrow x=\pm2$

$A=\int_{-2}^{2}(x^4-2x^2-8)\,dx$

$A=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3-8x\right]_{-2}^{2}$

$A=\left[\frac{(2)^5}{5}-\frac{2}{3}(2)^3-8(2)-\left(\frac{(-2)^5}{5}-\frac{2}{3}(-2)^3-8(-2)\right)\right]$

$A=\left[\frac{32}{5}-\frac{16}{3}-16-\left(\frac{-32}{5}+\frac{16}{3}+16\right)\right]$

$A=\frac{32}{5}-\frac{16}{3}-16+\frac{32}{5}-\frac{16}{3}-16$

$A=\frac{32}{5}+\frac{32}{5}-\frac{16}{3}-\frac{16}{3}-16-16$

$A=\frac{64}{5}-\frac{32}{3}-32$

$A=\frac{172-160-480}{15}$

$A=\left|\frac{-448}{15}\right|$

$A=\frac{448}{15}$

26 جد المساحة المحصورة بين المنحنين

$$y = x^3 \ , \ y = x$$

2015 تمهيدي

Sol:

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

أما $x = 0$ أو $x = 1$ أو $x = -1$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$A_1 = \left[(0) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})\right] = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$A_2 = \left[(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (0)\right]$$

$$A_2 = -\frac{1}{4}$$

2017 دور (1) احيائي

2017 دور (3) احيائي - داخل

2018 دور (1) احيائي - داخل

2019 دور (3) تطبيقي

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\ \text{unit}^2$$

27 جد المساحة المحددة بين منحني القطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيم الذي معادلته $y = 2x + 3$

2014 خارج القطر

Sol:

$$h(x) = g(x) - f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$A = \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\, dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$A = \left[(\not 9 - \not 9 - 9) - (-\frac{1}{3} - 1 + 3)\right]$$

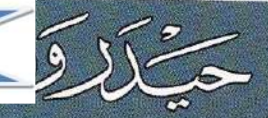
$$A = -9 + \frac{1}{3} + 1 - 3$$

$$A = 11 + \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{-33 + 1}{3}$$

$$A = \left|\frac{-32}{3}\right|$$

$$A = \frac{32}{3}\ \text{unit}^2$$



جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x)=\sqrt{2x-1}, g(x)=x$

وعلى الفترة $[1,5]$

28

2017 دور (2) تطبيقي- خارج

Sol :

$f(x)=g(x) \Rightarrow \left[\sqrt{2x-1}=x\right]$ بتربيع الطرفين

$x^2=2x-1 \Rightarrow x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x=1 \in [1,5]$ لايجزأ الفترة

$$A=\int_1^5 (x-\sqrt{2x-1})\,dx$$

$$A=\int_1^5 \left(x-(2x-1)^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$A=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}.\frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5$$

$$A=\left[(\frac{25}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{(9)^3})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{(1)^3}\right]$$

$$A=(\frac{25}{2}-9)-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$$

$$A=(\frac{25}{2}-9-\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$$

$$A=(12-9+\frac{1}{3})$$

$$A=\left|\frac{10}{3}\right|$$

$$A=\frac{10}{3}\ \text{unit}^2$$

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x)=\frac{1}{2}x, g(x)=\sqrt{x-1}$

وعلى الفترة $[2,5]$

29

2018 دور (3) تطبيقي- داخل

2017 دور (1) تطبيقي- خارج

Sol :

$f(x)=g(x)$

$\left[\frac{1}{2}x=\sqrt{x-1}\right]$ بتربيع الطرفين

$\left[\frac{1}{4}x^2=x-1\right].4$

$x^2=4x-4 \Rightarrow x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0$

$x=2 \in [2,5]$ لايجزأ

$$A=\int_2^5 \left(\frac{1}{2}x-(x-1)^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$A=\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$$

$$A=\left[(\frac{25}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{(4)^3})-(1-\frac{2}{3}\sqrt{(1)^3})\right]$$

$$A=\left[(\frac{25}{4}-\frac{16}{3})-(1-\frac{2}{3})\right]$$

$$A=\left[\frac{25}{4}-\frac{16}{3}-1+\frac{2}{3}\right]$$

$$A=\left[\frac{75-64-12+8}{12}\right]$$

$$A=\left|\frac{7}{12}\right| \Rightarrow A=\frac{7}{12}\ \text{unit}^2$$




30 جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = y = x^2 + 5x - 4$ والمستقيم الذي معادلته $y = 6x + 2$

2018 دور (1) احيائي خارج

Sol:

$(x^2 + 5x - 4) - (6x + 2) = 0$

$x^2 + 5x - 4 - 6x - 2 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x - 3)(x + 2) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$$A = \int_{-2}^{3} (x^2 - x - 6)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{3}$$

$$= \left[9 - \frac{9}{2} - 18\right] - \left[\frac{-8}{3} - 2 + 12\right]$$

$$= (\frac{-9}{2} - 9) - (\frac{-8}{3} + 10)$$

$$= (\frac{-9-18}{2}) - (\frac{-8+30}{3})$$

$$= \frac{-27}{2} - \frac{22}{3} = \frac{-81-44}{6}$$

$$= \frac{-125}{6}$$

$$|A| = \left|\frac{-125}{6}\right| = \frac{125}{6} \text{unit}^2$$

31 جد المساحة المحددة بالمنحنين $y = \sin x$, $y = \sin x.\cos x$ وعلى الفترة $[0, 2\pi]$

Sol:

$\sin x = \sin x.\cos x$

$\sin x.\cos x - \sin x = 0$

$\sin x(\cos x - 1) = 0$

أما $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, 2\pi]$ لايجزأ

أو $x = \pi \in [0, 2\pi]$ يجزأ

أو $x = 2\pi \in [0, 2\pi]$ لايجزأ

أو $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1$

$\Rightarrow x = 0$

$$A_1 = \int_{0}^{\pi} (\sin x \cos x - \sin x)\, dx$$

$$A_1 = \left[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x\right]_{0}^{\pi}$$

$$A_1 = (\frac{(\sin \pi)^2}{2} + \cos \pi) - (\frac{(\sin 0)^2}{2} + \cos 0)$$

$A_1 = (0 - 1) - (0 + 1)$

$A_1 = -1 - 1$

$A_1 = -2$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} (\sin x \cos x - \sin x)\, dx$$

32

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$y = 1 + \cos x, y = -\cos x$

وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

2004 دور (2)

Sol:

$1 + \cos x = -\cos x$

$1 + \cos x + \cos x = 1 + 2\cos x$

$1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3} =$ زاوية الاسناد

أما $x = \frac{2\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ

أو $x = \frac{4\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$ لايجزأ

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)\, dx$$

$$A = [x + 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \left[(\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2}) - (0) \right]$$

$$A = \left| \frac{\pi}{2} + 2 \right|$$

$$A = \frac{\pi}{2} + 2 \text{ unit}^2$$

$$A_2 = \left[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$A_2 = (\frac{\sin^2 2\pi}{2} + \cos 2\pi) - (\frac{\sin^2 \pi}{2} + \cos \pi)$$

$$A_2 = 0 + 1 - [0 - 1]$$

$$A_2 = 1 + 1$$

$$A_2 = 2$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = 2 + 2$$

$$A = 4 \text{ unit}^2$$

1998 دور (2)

2004 دور (1)

2009 تمهيدي

2014 دور (1)

2015 دور (1) خارج

35

جد المساحة المحددة بالمنحنين

$$y=\sin^2 x \ , \ y=\sin x$$

وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

2012 خارج القطر

Sol :

$$\sin^2 x=\sin x$$

$$\sin^2 x-\sin x=0$$

$$\sin x(\sin x-1)=0$$

أما $\sin x=0 \Rightarrow x=0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لايجزأ

أو $x=\pi\notin\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لايجزأ

أو $\sin x-1=0 \Rightarrow \sin x=1$

$x=\frac{\pi}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لايجزأ

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x)\ dx$$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]dx$$

$$A=\left[\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A=\left[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi)+\cos\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}(0-\frac{1}{2}\sin 0)+\cos 0\right]$$

$$A=\left|\frac{\pi}{4}-1\right| \Rightarrow A=1-\frac{\pi}{4}\ \text{unit}^2$$

36

جد المساحة المحددة بالمنحنين

$$f(x)=2\sin x+1 \ , \ g(x)=\sin x$$

وعلى الفترة $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

2013 دور (2)

2015 دور (1) نازحين

2018 تمهيدي تطبيقي

Sol:

$$f(x)=g(x)$$

$$2\sin x+1=\sin x$$

$$2\sin x+1-\sin x=0$$

$$\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=-1$$

$x=\frac{3\pi}{2}\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ لايجزأ

$$A=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+1)\ dx$$

$$A=[-\cos x+x]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$A=\left[(-\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2})-(-\cos 0+0)\right]$$

$$A=\left|\frac{3\pi}{2}+1\right|$$

$$A=\frac{3\pi+2}{2}\ \text{unit}^2$$

جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = \cos x$ والمنحني $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

37

2014 تمهيدي خارج

2019 دور (1) تطبيقي

Sol:

$f(x) = g(x)$

$[\cos x = \sin x] \div \cos x$

$\tan x = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4}$ زاوية الاسناد

أما $x = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

أو $x = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$A_1 = [\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A_1 = \left[(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin(-\frac{\pi}{2}) + \cos(-\frac{\pi}{2}))\right]$$

$$A_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) - (-1 + 0)$$

$$A_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$$

$$A_1 = \sqrt{2} + 1$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$A_2 = [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_2 = \left[(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4})\right]$$

$$A_2 = (1 + 0) - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$A_2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$A_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$A = |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}|$$

$$A = 2\sqrt{2}\ \text{unit}^2$$

2017 دور (2) احيائي - داخل

2017 دور (2) احيائي - خارج

10 المسافة

1

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)m/sec^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $(82)m/sec$ بعد مرور $(4)sec$ من بدء الحركة جد :

a) المسافة خلال الثانية الرابعة

b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 10 ثواني

1997 دور (1)
2017 دور (2) تطبيقي - خارج

Sol :

$$v(t)=\int a(t)\Rightarrow v(t)=\int 18\ dt$$

$$v(t)=18t+c\ ,\ v(t)=82$$

عندما $t=4$

$$82=18(4)+c$$

$$82=72+c\Rightarrow c=10$$

$$v(t)=18t+10$$

a) $d=\int_3^4 v(t)\ dt=\int_3^4(18t+10)\ dt$

$$d=\left[9t^2+10t\right]_3^4$$

$$d=[(144+40)-(81+30)]$$

$$d=[184-111]=|73|$$

$$d=73m$$

b) $s=\int_0^{10} v(t)\ dt$

$$s=\int_0^{10}(18t+10)\ dt$$

$$s=\left[9t^2+10t\right]_0^{10}$$

$$s=(900+100)-(0-0)$$

$$s=1000m$$

2



جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=(2t-4)m/s$ جد المسافة المقطوعة بالفترة $[1,6]$ ثم جد بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة

2000 دور (2)
2017 دور (2) احيائي - موصل

Sol :

a) المسافة المقطوعة بالفترة $[1,6]$

$$v(t)=0\Rightarrow 2t-4=0\Rightarrow 2t=4$$

$$t=2\in[1,6]$$

$$d_1=\int_1^2(2t-4)\ dt=\left[t^2-4t\right]_1^2$$

$$d_1=[(4-8)-(1-4)]$$

$$d_1=-4+3=-1$$

2018 دور (2) تطبيقي - داخل

$$d_1=|-1|\Rightarrow d_1=1m$$

$$d_2=\int_2^6(2t-4)\ dt=\left[t^2-4t\right]_2^6$$

$$d_2=[(36-24)-(4-8)]$$

$$d_2=12+4\Rightarrow d_2=16m$$

2018 دور (2) احيائي - خارج

$$d=|d_1|+|d_2|$$

$$d=1+16\Rightarrow d=17m$$

جسم يتحرك على خط مستقيم وكانت $v(t)=\frac{3}{2}\sqrt{t}+\frac{3}{\sqrt{t}}\ m/sec$ وكان بعده بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة يساوي 20m جد ازاحته عند كل t



2003 دور (1)

Sol :

$$s(t)=\int(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}+3t^{\frac{-1}{2}})\ dt$$

$$s(t)=\frac{3}{2}.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+(3)(2)t^{\frac{1}{2}}+c$$

$$s(t)=\sqrt{t^3}+6\sqrt{t}+c$$

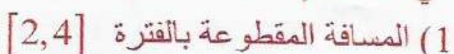
$$20=\sqrt{(4)^3}+6\sqrt{4}+c$$

$$20=8+12+c\Rightarrow c=0$$

$$s(t)=\sqrt{t^3}+6\sqrt{t}$$

2010 تمهيدي

اذا كانت سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم هي $v(t)=(3t^2+6t+3)m/s$ احسب



1) المسافة المقطوعة بالفترة $[2,4]$

2) الازاحة المقطوعة بالفترة $[2,4]$

3) الزمن اللازم ليصبح التعجيل $18m/sec^2$

4

2003 دور (2)

Sol :

$$v(t)=0\Rightarrow 3t^2+6t+3=0$$

$$3(t^2+2t+1)=0\Rightarrow 3(t+1)^2=0$$

$$t+1=0\Rightarrow t=-1\notin[2,4]$$

$$d=\int_2^4(3t^2+6t+3)\ dt$$

2020 دور(1) تطبيقي

$$d=\left[t^3+3t^2+3t\right]_2^4$$

$$d=[(64+48+12)-(8+12+6)]$$

$$d=|124-26|$$

$$d=|98|\Rightarrow d=98\ m$$

$$s=\int_2^4(3t^2+6t+3)\ dt$$

$$s=\left[t^3+3t^2+3t\right]_2^4$$

$$s=(64+48+12)-(8+12+6)$$

$$s=124-26$$

$$s=98m$$

$$a(t)=v(t)=6t+6$$

$$18=6t+6$$

$$6t=12\Rightarrow t=2\ sec$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $5m/sec^2$ فاذا كان بعده من بدء الحركة يساوي 180m بعد مرور 6sec والسرعة عندها 45m/sec جد السرعة عند $t=2$



2004 دور (2)

Sol :

$$v(t)=\int a(t)$$

$$v(t)=\int 5\ dt$$

$$v(t)=5t+c$$

$v(t)=45$ عندما $t=6$

$$45=30+c$$

$$c=15$$

$$v(t)=5t+15$$

$$v(2)=5(2)+15$$

$$v(2)=10+15=25\ m/s$$



جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل منتظم يساوي $(3t+2)m/s^2$ جد سرعة الجسم بعد مضي $2sec$ من بدء الحركة ثم جد المسافة المقطوعة بالفترة $[2,6]$

6

2005 تمهيدي

Sol:

$$v(t) = a(t)\ dt$$

$$v(t) = \int (3t+2)\ dt$$

$$v(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t + c$$

∵ التعجيل منتظم فانه في بدء الحركة

يكون فيها $v = 0 , t = 0$ اي انه $c = 0$

$$v(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t$$

a) $v(2) = \frac{3}{2}(2)^2 + 2(2)$

$$v(2) = 6 + 4 = 10\,m/s$$

b) $d = \int_2^6 (\frac{3}{2}t^2 + 2t)\ dt$

$$d = \left[\frac{1}{2}t^3 + t^2\right]_2^6$$

$$d = [(108+36)-(4+4)]$$

$$d = |136|$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)m/sec^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $82m/sec$ بعد مرور $4sec$ من بدء الحركة جد
1. المسافة خلال الثانية الثانية
2. بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين

7

2015 دور (1)

Sol:

$$v(t) = \int a(t)\ dt \Rightarrow v(t) = \int 18\ dt$$

$$v(t) = 18t + c$$

$$82 = 18(4) + c \Rightarrow 82 = 72 + c$$

$$c = 10 \Rightarrow v(t) = 18t + 10$$

1) $d = \int_1^2 v(t)\ dt = \int_1^2 (18t+10)\ dt$

$$d = \left[9t^2 + 10t\right]_1^2$$

$$d = [(36+20)-(9+10)]$$

$$d = |37| \Rightarrow d = 37m$$

2) $s = \int_0^2 v(t)\ dt = \int_0^2 (18t+10)\ dt$

$$s = \left[9t^2 + 10t\right]_0^2$$

$$s = [(36+20)-(0-0)]$$

$$s = 56m$$

b) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة

Sol:

$$s = \int_0^4 v(t)\ dt = s = \int_0^4 (2t-4)\ dt$$

$$s = \left[t^2 - 4t\right]_0^4$$

$$s = [(16-16)-(0-0)]$$

$$s = 0\ m$$

تتحرك نقطة مادية من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t-6t^2)m/s$ جد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ثم احسب التعجيل عندها

8

2007 تمهيدي | 2014 خارج القطر | 2014 دور (2) | 2016 دور (2)

Sol :

$$v(t)=100t-6t^2$$

$$s=\int(100t-6t^2)\,dt$$

$$s=50t^2-2t^3+c$$ من السكون

$$,t=0\ ,\ s=0$$

$$s=50(0)^2-2(0)^3+c\Rightarrow c=0$$

$$\therefore\ \ s=50t^2-2t^3$$ الازاحة

$$\left[50t^2-2t^3=0\right]\div 2$$

$$25t^2-t^3=0$$

عودة النقطة الى موضع الانطلاق يعني الازاحة تساوي صفر فيزيائيا

$$t^2(25-t)=0$$

$$t^2=0\Rightarrow t=0$$ يهمل

$$25-t=0\Rightarrow t=25$$

التعجيل = مشتقة السرعة

$$a(t)=100-12t$$

$$a(t)=100-12(25)$$

$$a(t)=100-300$$

$$=-200\ \ m/s^2$$

2018 دور (1) احيائي - داخل

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل مقداره $10m/s^2$ وبعد2 ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعته $24m/s$ جد المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة ثم بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة .

9

2007 دور (1) | 2015 دور (2) | 2017 دور (1) تطبيقي- خارج | 2020 دور (1) احيائي

Sol :

$$v(t)=\int a(t)\,dt$$

$$v(t)=\int 10\,dt$$

$$v(t)=10t+c$$

$$v(t)=24$$ عندما $t=2$

$$24=20+c\Rightarrow c=4$$

$$v(t)=10t+4$$

$$d=\int_4^5(10t+4)\,dt$$

$$d=\left[5t^2+4t\right]_4^5$$

$$d=\left[(125+20)-(80+16)\right]$$

$$d=|49|\Rightarrow d=49\ m$$

$$s=\int_0^4(10t+4)\,dt=\left[5t^2+4t\right]_0^4$$

$$s=(80+16)-(0-0)$$

$$s=96\ m$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة

$$v(t)=(3t^2-12t+9)\ m/min$$

احسب المسافة المقطوعة بالفترة $[0,2]$

ثم احسب الزمن الذي يصبح فيه التعجيل

$18m/min^2$

10

Sol:

$v(t)=0 \Rightarrow 3t^2-12t+9=0$

$3(t^2-4t+3)=0$

2009 دور (1)

$3(t-3)(t-1)=0$

أما $t=1 \in [0,2]$ يجزأ

أو $t=3 \notin [0,2]$

$$d_1=\int_0^1 (3t^2-12t+9)\ dt$$

$$d_1=\left[t^3-6t^2+9t\right]_0^1$$

$$d_1=(1-6+9)-(0) \Rightarrow d=|4|$$

$$d_1=4\ m$$

$$d_2=\int_1^2 (3t^2-12t+9)\ dt$$

$$d_2=\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^2$$

$$d_2=[(8-24+18)-(1-6+9)]$$

$$d_2=|-2| \Rightarrow d_2=2\ m$$

$$d=|d_1|+|d_2| \Rightarrow d=6m$$

$$a(t)=6t-12 \Rightarrow 18=6t-12$$

$$30=6t \Rightarrow t=5min$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة

$$v(t)=(3t^2+4t+7)m/s$$

جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها.



2010 دور (2)

Sol:

$v(t)=0 \Rightarrow 3t^2+4t+7 \neq 0$

$$d=\int_0^4 v(t)\ dt$$

$$d=\int_0^4 (3t^2+4t+7)\ dt$$

$$d=\left[t^3+2t^2+7t\right]_0^4$$

$$d=[(64+32+28)-(0)]$$

$$d=|124| \Rightarrow d=124m$$

$$a(t)=v'(t)$$

$$a(t)=6t+4$$

$$a(4)=24+4$$

$$a(4)=28\ m/sec^2$$

12

جسم بتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)m/sec^2$ فاذا كانت سرعته اصبحت $90m/sec$ بعد مرور $(4)sec$ احسب المسافة المقطوعة بالفترة $[1,2]$

2011 دور (2)

2018 دور (1) تطبيقي- داخل

Sol:

$$v(t)=\int a(t)\,dt = \int (4t+12)\,dt$$

$$v(t)=2t^2+12t+c$$

$$v(t)=90 \quad \text{عندما} \quad t=4$$

$$90=2(4)^2+12(4)+c$$

$$90=32+48+c$$

$$c=10$$

$$v(t)=2t^2+12t+10$$

بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر لا داعي الى مساواتها بالصفر عن حساب المسافة المقطوعة بفترة معينة لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لا يجزأ تكامل

$$d=\int_1^2 (2t^2+12t+10)\,dt$$

$$d=\left[\frac{2}{3}t^3+6t^2+10t\right]_1^2$$

$$d=\left[(\frac{16}{3}+24+20)-(\frac{2}{3}+6+10)\right]$$

$$d=\left[\frac{16}{3}+44-\frac{2}{3}-16\right]$$

$$d=\left[\frac{14}{3}+28\right]=\left[\frac{14+84}{3}\right]$$

$$d=\left|\frac{98}{3}\right| \Rightarrow d=\frac{98}{3}\ m$$

$$d=32.6\ m$$

13

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4)m/s^2$ فاذا كانت سرعته اصبحت $10/ms$ بعد مضي ثانيتين

جد :

2013 تمهيدي

Sol: اولاً: جد المسافة خلال الثانية الخامسة

$$V(t)=\int d(t)\,dt$$

$$V(t)=\int 4\,dt$$

$$V(t)=4t+c$$

عند $V(t)=10$

$t=2$

$$10=4(2)+c$$

$$10=8+c \Rightarrow \boxed{c=2}$$

$$V(t)=4t+2$$

$$d=\int V(t)\,dt$$

$$d=\int_4^5 4t+2dt$$

سفينة شحن تتحرك بخط مستقيم بسرعة
$v(t) = (3t^2 - 6t + 3)m/min$ احسب
1) المسافة المقطوعة ضمن الفترة الزمنية $[2,4]$
2) الازاحة المقطوعة بعد مرور خمس دقائق من بدء الحركة

14

2013 خارج القطر
2014 دور (4) انبار

Sol :

$v(t) = 0$

$3t^2 - 6t + 3 = 0$

$3(t^2 - 2t + 1) = 0$

$3(t-1)^2 = 0$

$t = 1 \notin [2,4]$

$$d = \int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)\,dt$$

$$d = \left[t^3 - 3t^2 + 3t\right]_2^4$$

$$d = [(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)]$$

$$d = 28 - 2 = 26$$

$$d = |26| \Rightarrow d = 26\text{ m}$$

$$s = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)\,dt$$

$$s = \left[t^3 - 3t^2 + 3t\right]_0^5$$

$$s = [(125 - 75 + 15) - (0)]$$

$$s = 65\text{ m}$$

$$d = \left[2t^2 + 2t\right]_4^5$$

$$d = [2(25) + 10] - [2(16) + 2]$$

$$d = [50 + 10] - [32 + 2]$$

$$d = 60 - 40$$

$$d = 20\text{m}$$

ثانياً: جد بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 5s

$$S = \int_0^5 (4t + 2)dt$$

$$S = \left[2t^2 + 2t\right]_0^5$$

$$S = [2(25) + 2(5)] - [0]$$

$$S = 50 + 10$$

$$S = 60\text{m}$$

جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان

$v(t)=3t^2-6t$ فجد

1) المسافة المقطوعة بالفترة $[1,3]$



2016 تمهيدي

Sol :

$v(t)=0 \Rightarrow 3t^2-6t=0$

$3t(t-2)=0$

أما $3t=0 \Rightarrow t=0 \notin [1,3]$

أو $t-2=0 \Rightarrow t=2 \in [1,3]$ يجزأ

$d_1=\int_1^2 (3t^2-6t)\,dt$

$d_1=\left[t^3-3t^2\right]_1^2$

$d_1=[(8-12)-(1-3)]$

$=[-4+2]$

$d_1=|-2| \Rightarrow d_1=2m$

$d_2=\int_2^3 (3t^2-6t)\,dt$

$d_2=\left[t^3-3t^2\right]_2^3$

$d_2=[(27-27)-(8-12)]$

$d_2=|4| \Rightarrow d_2=4m$

$d=|d_1|+|d_2|$

$d=2+4=6m$

2) الازاحة المقطوعة بالفترة $[1,3]$

$s=\int_1^3 (3t^2-6t)\,dt$

$s=\left[t^3-2t^3\right]_1^3$

$s=(27-27)-(1-3)$

$s=2m$

16

تتحرك سيارة من السكون وبعد (t) دقيقة من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(50t-3t^2)km/min$ جد الزمن اللازم لعودة السيارة الى موضعها الاول التي بدأت منه ثم احسب التعجيل عند ذلك الزمن

2016 دور (2) خارج

2019 دور (1) احيائي - خارج

2019 تمهيدي تطبيقي

Sol :

$v(t)=50t-3t^2$

$s=\int (50t-3t^2)\,dt$

$s=25t^2-t^3+c$

$s=50(0)^2-(0)+c \Rightarrow c=0$

$s=25t^2-t^3$

$25t^2-t^3=0$

$t^2(25-t)=0$

$t^2=0 \Rightarrow t=0$ يهمل

$t=25$

$a(t)=50-6t$

$a(t)=50-6(25)$

$a(t)=50-150$

$a(t)=-100\,km/min^2$

17 جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 3t - 6$ جد:

اولاً: المسافة المقطوعة بالفترة [1,4]

$$3t - 6 = 0] \div 3$$

$$t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1,4]$$

$$d_1 = \int_1^2 (3t - 6)\ dt$$

$$d_1 = \left[\frac{3}{2}t^2 - 6t\right]_1^2$$

$$d_1 = \left[\frac{12}{2} - 12\right] - \left[\frac{3}{2} - 6\right]$$

$$d_1 = 6 - 12 - \frac{3}{2} + 6 = \frac{-3}{2}$$

$$d_2 = \int_2^4 (3t - 6)\ dx$$

$$d_2 = \left[\frac{3}{2}t^2 - 6t\right]_2^4$$

$$d_2 = \left[\frac{3}{2}(16) - 24\right] - [6 - 12]$$

$$d_2 = \frac{48}{2} - 24 - 6 + 12$$

$$d_2 = 24 - 24 - 6 + 12$$

$$d_2 = 6$$

$$d = |d_1| + |d_2|$$

$$d = \left|\frac{-3}{2}\right| + |6|$$

$$d = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$$

2017 دور (2) احيائي - موصل

ثانياً: جد الازاحة المقطوعة بالفترة [1,4]

$$s = \int_1^4 (3t - 6)\ dt$$

$$s = \left[\frac{3}{2}t^2 - 6t\right]_1^4$$

$$s = \left[\frac{3}{2}(16) - 6(4)\right] - \left[\frac{3}{2} - 6\right]$$

$$s = \left[\frac{48}{2} - 24\right] - \left[\frac{3}{2} - 6\right]$$

$$s = [24 - 24] - \frac{3}{2} + 6$$

$$s = \frac{9}{2}$$

18

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4$ جد :

اولا: المسافة المقطوعة بالفترة [1,4]

2018 دور (2) احيائي - خارج

Sol :

$2t - 4 = 0 \Rightarrow 2t = 4$

$\Rightarrow t = 2 \in [1,4]$

$d_1 = \int_1^2 (2t-4)\ dt$

$d_1 = \left[t^2 - 4t\right]_1^2 = [4-8]-[-1-4]$

$d_1 = [-4]-[-3] = -4+3 = -1$

$d_2 = \int_2^4 (2t-4)\ dt = \left[t^2-4t\right]_2^4$

$= [16-16]-[4-8] = 0-[-4]$

$d_2 = 4$

$d = |d_1| + |d_2|$

$d = |-1| + |4| = 1+4 = 5$ وحدة

ثانياً: المسافة المقطوعة بالثانية الرابعة

$d = \int_3^4 (2t-4)\ dt = \left[t^2-4t\right]_3^4$

$d = [16-16]-[9-12]$

$d = 0-[-3]$

$d = 3$ وحدة

ثالثاً: بـ بعده بعد مضي ثانيتين من بدء الحركة

$s = \int_0^2 (2t-4)\ dt$

$s = \left[t^2-4t\right]_0^2$

$= [4-8]-[0]$

$= -4$ وحدة

19

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $4t+12 m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور(4) ثواني تساوي (90m/s) احسب

1. السرعة عند $t = 2$
2. المسافة خلال الفترة [1,2]
3. الازاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

2019 دور (1) احيائي

1. السرعة عند $t = 2$

$V(t) = \int a(t)\ dt = \int 4t+12$

$V = 2t^2 + 12t + c \qquad t = 4 , V(t) = 90$

$90 = 2(4)^2 + 12(4)$

$90 = 32 + 48 + c$

$c = 10$

$V(t) = 2t^2 + 12t + 10$

عند $t = 2$

$V(t) = 2(2)^2 + 12(2) + 10$

$= 8 + 24 + 10$

$= 42$

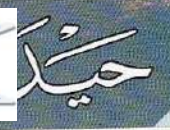
2. المسافة خلال الفترة [1,2]

$d = \int V(t)\ dt$

$d = \int_1^2 2t^2 + 12t + 10\ dt$

$\left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t\right]_1^2$

$\left[\frac{16}{3} + 24 + 20\right] - \left[\frac{2}{3} + 6 + 10\right]$



جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 3t - 6m/s$ جد:

1. المسافة المقطوعة في [1,3]
2. الازاحة المقطوعة في الثانية الخامسة
3. بعده بعد مضي(4) ثواني من بدء الحركة

20

2019 دور (2) تطبيقي

1. المسافة المقطوعة في [1,3]

$$3t-6=0 \Rightarrow 3t-6] \div 3$$

$$t=2 \in [1,3]$$

$$d_1 = \int_1^2 3t-6\ dt$$

$$= \left[3\frac{t^2}{2}-6t\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{3}{2}(2)^2-6(2)\right]-\left[\frac{3(1)^2}{2}-6(1)\right]$$

$$\left[\frac{12}{2}-12\right]-\left[\frac{3}{2}-6\right]$$

$$-6-\frac{3}{2}+6=\left|\frac{-3}{2}\right|=\frac{3}{2}$$

$$d_2 = \int_2^3 3t-6\ dt$$

$$= \left[\frac{3t^2}{2}-6x\right]_2^3$$

$$= \left[\frac{27}{2}-18\right]-\left[\frac{12}{2}-12\right]$$

$$\frac{27}{2}-18-6+12=\frac{27}{2}-12$$

$$\frac{27-24}{2}=\frac{3}{2}$$

$$d=|d_1|+|d_2|=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$\frac{16}{3}+44-\frac{2}{3}-16$$

$$\frac{18}{3}+28=6+28=34\ cm$$

3. الازاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

$$st = \int V(t)\ dt$$

$$= \int_0^{10} \left(2t^2+12t+10\right)\ dt$$

$$s = \left[\frac{2t^3}{3}+6t^2+10t\right]_0^{10}$$

$$= \frac{2(10)^3}{3}+6(10)^2+10(10)-0$$

$$= \frac{2000}{3}+600+100$$

$$= \frac{2000}{3}+700$$

$$= \frac{2000+2100}{3}$$

$$= \frac{4100}{3}\ cm$$



21

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 6t^2 - 12t$ جد:
1. المسافة المقطوعة في [1,3]
2. الازاحة المقطوعة في الفترة [1,3]

1. المسافة المقطوعة في [1,3]

$$6t^2 - 12t = 0 \Rightarrow t(6t - 12) = 0$$

اما $t = 0 \notin [1,3]$

$$6t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1,3]$$

$$d_1 = \int_1^2 6t^2 - 12t \, dt$$

$$= \left[\frac{6t^3}{3} - 6t^2\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{48}{3} - 24\right] - \left[\frac{6}{3} - 6\right]$$

$$[16 - 24] - 2 + 6$$

$$-8 + 4 = |-4| = 4$$

$$d_2 = \int_2^3 (6t^2 - 12t) \, dt$$

$$= \left[2t^3 - 6t^2\right]_2^3$$

$$= [54 - 54] - [16 - 24]$$

$$= -[-8] = 8$$

$$d = |d_1| + |d_2|$$

$$= 4 + 8 = 12$$

2019 دور (3) احيائي

2. الازاحة المقطوعة في الفترة [1,3]

$$s = \int_1^3 6t^2 - 12t \, dt = \left[2t^3 - 6t^2\right]_1^3$$

$$= [54 - 54] - [2 - 6]$$

$$0 - 2 + 6 = 4$$

2. الازاحة المقطوعة في الثانية الخامسة

$$\int_4^5 (3t - 6) \, dt = \left[\frac{3t^2}{2} - 6t\right]_4^5$$

$$= \left[\frac{75}{2} - 30\right] - \left[\frac{48}{2} - 24\right]$$

$$\left[\frac{75}{2} - 30 - \frac{48}{2} + 24\right]$$

$$= \frac{75}{2} - \frac{48}{2} - 6 = \frac{27}{2} - 6 = \frac{27 - 12}{2} = \frac{15}{2}$$

3. بعده بعد مضي(4) ثواني من بدء الحركة

$$\int_0^4 (3t - 6) \, dt = \left[\frac{3t^2}{2} - 6t\right]_0^4$$

$$\left[\frac{48}{2} - 6(4)\right] - [0]$$

$$24 - 24 = 0$$





11 الحجوم الدورانية

1 المنطقة المحددة بالمنحني $0 \le x \le 4$ و $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها .

2011 خارج القطر | 2013 دور (3) | 2018 دور (2) خارج

Sol:

$$v = \pi\int_a^b y^2 \ dx$$

$$\left[y = \sqrt{x}\right]$$

$$y^2 = x$$

$$v = \pi\int_0^4 x \ dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 8\pi \text{ unit}^3$$

تم تغير الفترة الى (0, 6)

2 جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0 , x = 2$ حول محور السينات

2011 دور (2) | 2014 تمهيدي | 2017 دور (2) تطبيقي- داخل

Sol:

$$v = \pi\int_a^b y^2 \ dx$$

$$v = \pi\int_0^2 8x \ dx = \pi\left[4x^2\right]_0^2$$

$$v = \pi[16 - 0] = 16\pi \text{ unit}^3$$

3 جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = x^2 + 1$ والمستقيمين $y = 1 , y = 2$ حول محور الصادات

2012 دور (1)

Sol:

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$$

$$v = \pi\int_a^b x^2 \ dy = \pi\int_1^2 (y-1) \ dy$$

$$v = \pi\left[\frac{1}{2}y^2 - y\right]_1^2$$

$$= \pi\left[(2-2) - (\frac{1}{2} - 1)\right]$$

$$v = \frac{1}{2}\pi \text{ unit}^3$$

4 جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = \sqrt{5}x^2$ والمستقيمين $x = 1 , x = 2$ حول محور السيني

2012 دور (2)

Sol:

$$\left[y = \sqrt{5}x^2\right]$$ بتربيع الطرفين

$$y^2 = 5x^4$$

$$v = \pi\int_a^b y^2 \ dx = \pi\int_1^2 5x^4 \ dx$$

$$v = \pi\left[x^5\right]_1^2 = \pi(32 - 1)$$

$$v = 31\pi \text{ unit}^3$$

5 جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بين المنحني $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 0\ ,\ y = 16$ حول المحور الصادي

2012 خارج القطر — 2015 تمهيدي — 2018 دور (3) احيائي - داخل — 2019 دور (1) تطبيقي - خارج

Sol :

$$\left[y = 4x^2\right] \div 4$$

$$x^2 = \frac{1}{4}y$$

$$v = \pi\int_a^b x^2\ dy = \pi\int_0^{16} \frac{y}{4}\ dy$$

$$v = \pi\left[\frac{y^2}{8}\right]_0^{16} = \pi(32 - 0)$$

2020 تمهيدي تطبيقي

$$v = 32\pi\ \text{unit}^3$$

6 جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0\ ,\ x = 5$ حول محور السينات

2012 تمهيدي — 2019 تمهيدي احيائي

Sol :

$$\left[y = 2x^2\right] \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$y^2 = 4x^4$$

$$v = \pi\int_a^b y^2\ dx$$

$$= \pi\int_0^5 4x^4\ dx$$

$$= \pi\left[\frac{4}{5}x^5\right]_0^5 = 2500\pi\ \text{unit}^3$$

7 اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالمنحني $y = x\sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0, x = 2$ حول المحور السيني

2013 تمهيدي

Sol :

$$V = \pi\int_0^1 y^2\ dx \qquad y^2 = (x\sqrt{x})^2$$

$$y^2 = x^3$$

$$= \pi\int_0^2 x^3\ dx = \pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$= \pi\left[\frac{16}{4}\right] - 0$$

$$= 4\pi\ \text{unit}^3$$

8 جد الحجم الناتج من دوران المســـاحة المحصورة بين المنحني $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول محور الصادي

2013 دور (1) — 2015 دور (1) خارج — 2016 دور (1) خارج

Sol :

$$y = x^2 + 1$$

$$x^2 = y - 1 \qquad \text{if } x = 0$$

$$0 = y - 1 \Rightarrow y = 1$$

$$v = \pi\int_a^b x^2\ dy = \pi\int_1^4 (y-1)\ dy$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}y^2 - y\right]_1^4 = \pi\left[(8-4) - (\frac{1}{2} - 1)\right]$$

$$= \frac{9}{2}\pi\ \text{unit}^3$$





جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y=\frac{1}{x}$ والمستقيمين $y=1 , y=2$ حول محور الصادي

9

2013 دور (2)

Sol:

$y=\frac{1}{x} \Rightarrow \left[x=\frac{1}{y}\right]$ بتربيع الطرفين

$x^2=\frac{1}{y^2}$

$v=\pi\int_a^b x^2\ dy=\pi\int_1^2 \frac{1}{y^2}\ dy$

$=\pi\int_1^2 y^{-2}dy=\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^2$

$=\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\pi\ unit^3$

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2=x^3$ والمستقيمين $x=0\ ,\ x=2$ حول محور السينات.

10

2014 دور (2)

Sol:

$v=\pi\int_a^b y^2\ dx=\pi\int_0^2 x^3\ dx$

$v=\pi\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=\pi(4-0)$

$v=4\pi\ unit^3$

2017 دور (1) احيائي - موصل

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ والمستقيمين $y=1\ ,\ y=4$ حول المحور الصادي

11

2014 دور (3)

2018 احيائي تمهيدي

Sol:

$\left[x=\frac{1}{\sqrt{y}}\right]$ بتربيع الطرفين

$x^2=\frac{1}{y}$

$v=\pi\int_a^b x^2\ dy=\pi\int_1^4 \frac{1}{y}\ dy$

$v=\pi\int_1^4 \frac{1}{y}\ dy=\pi[\ln y]_1^4$

$v=\pi[\ln 4-\ln 1]$

$v=\pi\ \ln(2)^2$

$v=2\pi\ln 2$

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y=4x^2$ والمستقيمين $y=0 , y=1$ حول محور الصادات

12

2014 نازحين

Sol:

$\left[y=4x^2\right]\div 4$

$x^2=\frac{y}{4}$

$v=\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_0^1 \frac{1}{4}y\ dy$

$v=\pi\left[\frac{1}{8}y^2\right]_0^1$

$v=\pi\left[\frac{1}{8}-0\right]=\frac{1}{8}\pi\ unit^3$

13

جد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحني $y=\frac{1}{x}$ والمستقيمين $x=1\ ,\ x=2\frac{1}{2}$ دورة كاملة حول المحور الصادي .

2015 دور (3)

2015 دور (4) رصافة

Sol:

$$y=\frac{1}{x}$$

$$x=1 \Rightarrow y=\frac{1}{1}=1$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow y=2$$

$$v=\pi\int_a^b x^2\ dy$$

$$y=\frac{1}{x} \Rightarrow \left[x=\frac{1}{y}\right]$$ بتربيع الطرفين

$$x^2=\frac{1}{y^2}$$

$$v=\pi\int_1^2 (y^{-2})\ dy$$

$$v=\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^2$$

$$v=\pi\left[-\frac{1}{2}+1\right]$$

$$v=\frac{1}{2}\pi\ unit^3$$

14

اوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y=\frac{3}{x}$ حيث $1\le y\le 3$ دورة كاملة حول محور الصادات .

2017 دور (2) احيائي - داخل

Sol:

$$y=\frac{3}{x}$$

$$x=\frac{3}{y}$$ بالتربيع

$$x^2=\frac{9}{y^2}$$

$$v=\pi\int_a^b x^2\ dy=\pi\int_1^3 \frac{9}{y^2}\ dy$$

$$v=\pi\int_1^3 9y^{-2}\ dy=\pi\left[\frac{-9}{y}\right]_1^3$$

$$v=\pi\left[\frac{-9}{3}+9\right]=\pi\left(\frac{-9+27}{3}\right)$$

$$v=6\pi\ unit^3$$

15 — 2017 دور (3) تطبيقي- داخل

جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $x^2+y^2=81$ حول محور الصادات علما ان المنحني يقطع محور الصادات

Sol :

$$x^2+y^2=81$$

$$x=0$$

$$y^2=81 \Rightarrow y=\pm 9$$

حدود التكامل

$$x^2=81-y^2$$

$$v=\pi\int_a^b x^2\ dy=\pi\int_{-9}^{9}(81-y^2)\ dy$$

$$v=\pi\left[81y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-9}^{9}$$

$$v=\pi[(729-243)-(-729+243)]$$

$$v=\pi[486+486]$$

$$v=972\pi\ \text{unit}^3$$

16 — 2017 دور (1) تطبيقي

جد الحجم الناتج من دوران الدائرة $y^2+x^2=9$ حول محور السينات ومركزها نقطة الاصل

Sol :

$$y=0 \Rightarrow 0+x^2=9$$

$$x^2=9 \Rightarrow x=\mp 3$$

$$V=\pi\int_a^b y^2\ dx$$

$$V=\pi\int_{-3}^{3}(9-x^2)\ dx$$

$$V=\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$

$$V=\pi\left[(27-9)(-27+9)\right]$$

$$V=\pi[18+18]$$

$$V=36\pi\ \ \text{unit}^3$$

احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = 1 - x$ والمستقيم $x = 0$ حول المحور الصادي

17

2017 دور (2) تطبيقي/موصل

2018 دور (2) احيائي

Sol :

$$y^2 = 1 - 0 \Rightarrow y^2 = 1$$

$$y = \mp 1$$

$$x = 1 - y^2$$

$$x^2 = (1 - y^2)^2$$

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - y^2)^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[1 - 2y^2 + y^4 \right] dy$$

$$V = \pi \left[y - \frac{2}{3} y^3 - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^{1}$$

$$V = \frac{16}{15} \text{ unit}^3$$

جد حجم المنطقة المتولدة من دوران الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ والمستمرة على الفترة $[0,6]$ حول محور السينات



2018 دور (2) تطبيقي- خارج

Sol :

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_0^6 x \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^6 = \pi \left[\left(\frac{1}{2} (6)^2 \right) - 0 \right]$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} (36) \right) = 18\pi \quad \text{unit}^3$$

احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0 , x = 2$ حول محور السينات

19

2019

Sol :

$$y = \sqrt{x^3}$$

$$y^2 = x^3$$

$$V = \pi \int_0^2 y^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^3 \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2$$

$$= \pi \left[\frac{(2)^4}{4} \right] - 0$$

$$= 4\pi \quad \text{unit}^3$$

لتكن $F:[2,5] \to R, f(x) = 2x - 3$

جد $\int_2^5 f(x)\,dx$ بصورة تقريبية وتحقق من ذلك هندسياً حيث $\sigma = (2,3,5)$

$f'(x) = 2x - 3$

$f'(x) = 2 \in [2,5]$ الدالة متزايدة دائماً على

التغيرات الجزئية [a,b]	طول الفترة h=b-a	mi	Mi	hmi	hMi
[2,3]	1	1	3	1	3
[3,5]	2	3	7	6	14
				7	17

$$\int_2^5 (2x-3)\,dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2}$$

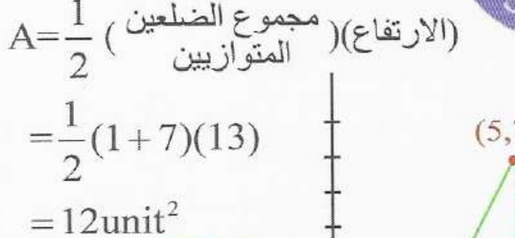
$$= \frac{7+17}{2} = 12unit^2$$

التحقق هندسياً

نعوض طرفي الفترة $[2,5]$ في الدالة

$f(2) = 1 \to (2,1)$

$f(5) = 1 \to (5,7)$

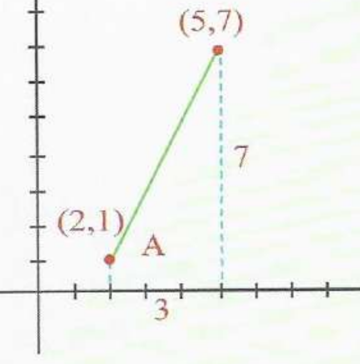


$A = \frac{1}{2}$ (مجموع الضلعين المتوازيين)(الارتفاع)

$= \frac{1}{2}(1+7)(13)$

$= 12unit^2$





جد $U(\sigma,f), L(\sigma,f)$ اذا علمت ان

$F:[-2,1] \to R, f(x) = 3 - x$

$\sigma = (-2,0,1)$

2012 دور(1) خارج

$f'(x) = -1$ الدالة متناقصة دائماً

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[-2,0]	2	3	5	6	10
[0,1]	1	2	3	2	3
				8	13

$L(\sigma,f) = 0$

$U(\sigma,f) = 13$

لتكن $f:[1,5] \to R, f(x) = 3x - 2$

جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_1^5 f(x)\,dx$

باستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3,5)$

2019 دور(3)

$f'(x) = 3$ الدالة متزايدة دائماً

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[1,2]	1	1	4	1	4
[2,3]	1	4	7	4	7
[3,5]	2	7	13	14	26
				19	37

$$\int_1^5 (3x-2)\,dx = \frac{19+17}{2} = 28unit^2$$

لتكن $F:[1,4]\rightarrow R, f(x)=3x-3$

جد قيمة التكامل $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma=(1,2,3,4)$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت المنحني f

$f'(x)=3$ الدالة متزايدة دائماً

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[1,2]	1	0	3	0	3
[2,3]	1	3	6	3	6
[3,4]	1	6	9	6	9
				9	18

$L(\sigma,f)=9\ ,\ U(\sigma,f)=18$

$$\int_{1}^{4}(3x-3)\,dx=\frac{9+18}{2}=13.5\ unit^2$$

الطريقة الهندسية

$[1,4]$

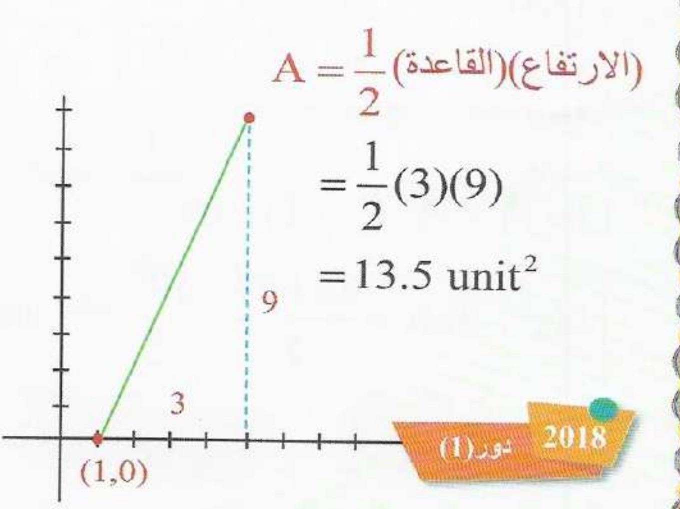
$f(1)=0$ $(1,0)$

$f(4)=9$ $(4,9)$

$A=\frac{1}{2}$(القاعدة)(الارتفاع)

$=\frac{1}{2}(3)(9)$

$=13.5\ unit^2$



لتكن $F:[1,5]\rightarrow R, f(x)=3$

جد $\int_{1}^{5} f(x)\,dx$ بتجزئتين منتظمتين وبالطريقة الهندسية.

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{5-1}{2}=2$$

$\sigma=(1,3,5)$

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[1,3]	2	3	3	6	6
[3,5]	2	3	3	6	6
				12	12

$L(\sigma,f)=12\ ,\ U(\sigma,f)=12$

$$\int_{1}^{5}(3)\,dx=\frac{12+12}{2}=12\ unit^2$$

الطريقة الهندسية

$f(1)=3$ $(1,3)$

$f(5)=3$ $(5,3)$

$A=$ (الطول)(العرض)

$=(3)(4)=12\ unit^2$

2017 تمهيدي

لتكن $F:[1,3]\to R$ حيث $f(x)=2x^2$ اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 f(x)\,dx$ اذا جزئت الفترة [1,3] الى فترتين جزئيتين منتظمتين

2012 دور(1)

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{2}=1\Rightarrow \sigma=(1,2,3)$$

$$f'(x)=4x\Rightarrow 4x=0\Rightarrow x=0\notin[1,3]$$

الدالة متزايدة في مجالها

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[1,2]	1	2	8	2	8
[2,3]	1	8	18	8	18
				10	26

$$\int_1^3 2x^2\,dx=\frac{10+26}{2}=18\text{ unit}^2$$



لتكن $F:[1,3]\to R$ حيث $f(x)=x^2$ اوجد قيمة تقريبية للتكامل اذا جزئت الفترة[1,3]الى فترتين جزئيتين منتظمتين

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{2}=1\Rightarrow \sigma=(1,2,3)$$

$$f'(x)=2x\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0\notin[1,3]$$

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[1,2]	1	1	4	1	4
[2,3]	1	4	9	4	9
				5	13

$$\int_1^3 x^2dx=\frac{5+13}{2}=9\text{ unit}^2$$

2015 خارج — 2017 دور(1) — 2019 دور(2)

اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_2^4(3x^2-3)\,dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma=(2,3,4)$

$$f'(x)=6x\Rightarrow 6x=0\Rightarrow x=0\notin[2,4]$$

الدالة متزايدة في مجالها

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[2,3]	1	9	24	9	24
[3,4]	1	24	45	24	45
				33	69

$$L(\sigma,f)=33\ ,\ U(\sigma,f)=69$$

$$\int_2^4(3x^2-3)dx=\frac{33+69}{2}=\frac{102}{2}=51\text{ unit}^2$$

2017 دور(1) نازحين — 2015 دور(3)

اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{1}^{5} x^3 \, dx$ بأستخدام اربع تجزيئات منتظمة

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1 \, , \, \sigma = (1,2,3,4,5)$$

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,5]$$

الدالة متزايدة في مجالها

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[1,2]	1	1	8	1	8
[2,3]	1	8	27	8	27
[3,4]	1	27	64	27	64
[4,5]	1	64	125	64	125
				100	224

$$L(\sigma, f) = 100$$

$$U(\sigma, f) = 224$$

$$\int_{1}^{5} x^3 \, dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2}$$

$$= \frac{100 + 224}{2}$$

$$= 162 \quad unit^2$$

2013 دور(1) خارج — 2015 دور(3) — 2017 دور(2) موصل



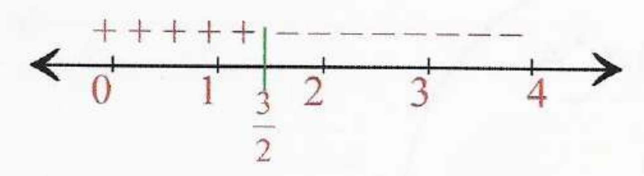
لتكن $F : [0,4] \to R, f(x) = 3x - x^2$ جد $U(\sigma, f) \, , \, L(\sigma, f)$ مستخدماً اربع تجزيئات منتظمة

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\sigma = (0,1,2,3,4)$$

$$f'(x) = 3 - 2x \Rightarrow 3 - 2x = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \in [1,2]$$



$$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$$

$(\frac{3}{2} \, , \, \frac{9}{4})$ عظمى محلية

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[0,1]	1	0	2	0	2
[1,2]	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
[2,3]	1	0	2	0	2
[3,4]	1	-4	0	-4	0
				-2	6.25

$$L(\sigma, f) = -2$$

$$U(\sigma, f) = 6.25$$

2017 دور(2) خارج — 2017 دور(1) موصل — 2019 تمهيدي

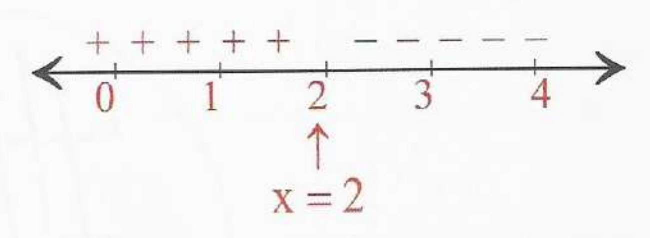
لتكن $F:[0,4]\to R, f(x)=4x-x^2$
جد $U(\sigma,f)$, $L(\sigma,f)$ بأستخدام اربع تجزيئات متساوية

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$

$\sigma=(0,1,2,3,4)$

$f'(x)=4-2x \Rightarrow f'(x)=0$

$4-2x=0 \Rightarrow x=2\in[0,4]$



[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[0,1]	1	0	3	0	3
[1,2]	1	3	4	3	4
[2,3]	1	3	4	3	4
[3,4]	1	0	3	0	3
				6	14

$L(\sigma,f)=6$

$U(\sigma,f)=14$

2018 تمهيدي
2019 دور(1)

جد $U(\sigma,f)$, $L(\sigma,f)$ اذا علمت ان
$F:[1,4]\to R, f(x)=3x^2+2x$
بأستخدام ثلاث تجزيئات متساوية

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-1}{3}=-1$$

$f'(x)=6x+2 \Rightarrow 6x+2=0$

$6x=-2 \Rightarrow x=\frac{-1}{3}\notin[1,4]$

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[1,2]	1	5	16	5	16
[2,3]	1	16	13	16	13
[3,4]	1	33	56	33	56
				54	105

$L(\sigma,f)=54$

$U(\sigma,f)=105$

2012 دور(3)



اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{1}^{3} \frac{3}{x}\, dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3)$

$$f(x) = 3x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-2} = \frac{-3}{x^2}$$

$$f'(x) \neq 0$$

الدالة متناقصة في مجالها

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[1,2]	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	3
[2,3]	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
				$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$

$$L(\sigma, f) = 54$$

$$U(\sigma, f) = 105$$

$$\int_{1}^{3} \frac{3}{x}\, dx = \frac{\frac{5}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{7}{2} \text{unit}^2$$

دور(1) خارج 2011

دور(2) 2018

اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{3}^{5} (2x^2 - 2)\, dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (3,4,5)$

$$f'(x) = 4x \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [3,5]$$

الدالة متزايدة في مجالها

[a,b]	h	mi	Mi	hmi	hMi
[3,4]	1	16	30	16	30
[4,5]	1	30	48	30	48
				46	78

$$L(\sigma, f) = 46$$

$$U(\sigma, f) = 78$$

دور(1) 2016

$$\int_{1}^{4} (3x^2 - 3)\, dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2}$$

$$= \frac{46 + 78}{2}$$

$$= 62 \quad \text{unit}^2$$

